

S ³³
1206

Г. Кн. Ф.

~~№ 60/12~~

№ 2045

S $\frac{33}{1206}$

СПБ. 192 Р. V.	
ФУНД. БИБЛИОТЕКИ	
Име. №	2045
Шкафы	18
Полки	6
№	4550

$\frac{18 \frac{1}{4}}{19}$

16ms. sup. bee 14/2-84

18/19

21148
—
7

№ 60.

33
1206

1 вкл.

№ 2045 I. P.

8626

АРХИМЕДА

ПСАММИТЬ,

или

ИЗЧИСЛЕНИЕ ПЕСКУ

ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ РАВНОМЪ ШАРУ НЕ-
ПОДВИЖНЫХЪ ЗВѢЗДЪ.

Переводъ съ Греческаго

Ө. ПЕТРУШЕВСКАГО.

Съ Примѣчаніями, и съ присовокупленіемъ

ОБЩЕЙ ТЕОРИИ

ВЕЛИЧИНЪ ПРОПОРЦІОНАЛЬНЫХЪ

Древнихъ Геометровъ.



САНКТПЕТЕРБУРГЪ,

сп. 32 9114.

ВЪ ТИПОГРАФІИ ДЕПАРТАМЕНТА НАРОДНАГО
ПРОСВѢЩЕНІЯ.

1824.



ПЕЧАТАТЬ ПОЗВОЛЕНО

съ шѣмъ, чѣобы по напечатаніи, до выпуска изъ типографіи, предсшавлены были въ С. Петербургскій Цензурный Комитетъ *сели* экземпляровъ сей книги, для препровожденія, куда слѣдуетъ, на основаніи узаконеній. С. Петербургъ. Ноября 17 дня 1823 года.

Цензоръ, Александръ Бируковъ.



2010514801

ЕГО ВЫСОКОПРЕВОСХОДИТЕЛЬСТВУ

S 33
1206

ГОСПОДИНУ

ДѢЙСТВИТЕЛЬНОМУ ТАЙНОМУ СОВѢТНИКУ,
СЕНАТОРУ И ОРДЕНОВЪ: СВ. АЛЕКСАНДРА
НЕВСКАГО И СВ. ВЛАДИМИРА I СТЕПЕНИ
КАВАЛЕРУ

НИКОЛАЮ НИКОЛАЕВИЧУ

НОВОСИЛЬЦОВУ.



Въ знакъ глубочайшаго почитанія
и совершенной преданности
посвящаетъ

Θ. Петрушевскій.

170 ЭКОНОМИЧЕСКОЕ ПОЛОЖЕНИЕ

ПОСЛОВИЦЫ

Воспитание — это работа.
Скромность и скромность — это богатство.
Почти и не знаю, что такое счастье.

Каждый человек должен быть честным.

Никогда не поздно учиться.

Всё, что мы делаем, должно быть полезно.

Наша жизнь — это борьба.

Всё, что мы делаем, должно быть честно.

Наша жизнь — это борьба.

Всё, что мы делаем, должно быть честно.

Наша жизнь — это борьба.

Всё, что мы делаем, должно быть честно.

Наша жизнь — это борьба.

Всё, что мы делаем, должно быть честно.

Наша жизнь — это борьба.

Всё, что мы делаем, должно быть честно.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

ПСАММИТЬ или Аренарій (1) есть не что иное, какъ письмо къ Гелону сыну и наслѣднику (2) Иерона Царя Сиракузкаго, написанное въ опроверженіе мнѣнія шѣхъ, копорые думаютъ, будто нельзя изчислить песку, покрывающаго всѣ страны земнаго шара. Архимедъ, разпространивъ сей вопросъ несравнено далѣе, то есть перейдя отъ него къ количеству песка равному всей землѣ, попомъ всему, называемому имъ міру, и на-

(1) Отъ *ψάμμος*, arena, что значитъ песокъ.

(2) Нѣкоторые называютъ Гелона Царемъ Сиракузскимъ, вѣроятно основываясь на самомъ Псаммитѣ, копорой начинается такъ: *Οἰονταί τινας, Βασίλει Γέλων*, и проч. Но здѣсь *Βασίλει* есть нечто иное какъ шишуль, приписываемый наслѣднику Самодержавнаго Государя. И дѣйствительно Гелонъ не былъ Царемъ, ибо онъ, какъ извѣстно, умеръ прежде своего родителя.

конецъ небесному шару или неподвижныхъ звѣздъ, не только показываешь возможность изчислить количество песку даже въ семь послѣднемъ, но и доказываешь, что число песчинокъ, въ немъ содержащихся, будетъ меньше тысячи мириадъ чиселъ восьмыхъ, то есть меньше числа, которое по нашему счисленію изобразится, когда къ единицѣ припишемъ съ правой стороны шестьдесятъ три нуля. Сіе небольшое сочиненіе, сколько любопытно по своему содержанію, столько и важно, какъ по образу изложенія, такъ и по нѣкоторымъ предмѣшамъ, относящимся къ Астрономіи. Здѣсь между прочимъ можно видѣть, что уже древними окружность земнаго шара измѣрена была съ довольною точностію, что имъ было извѣстно движеніе ея, одно изъ важнѣйшихъ новыхъ открытій, и что они почти одинаково съ нами думали объ ужасномъ разстояніи неподвижныхъ звѣздъ.

Я не буду останавливаться на различіи понятій ихъ о величинѣ и разстояніяхъ земли, солнца и звѣднаго неба, какъ о такомъ предметѣ, который въ Псаммитѣ не самый важный, шѣмъ болѣе, что Архимедъ, для избѣжанія возраженій, увеличилъ все до такой степени, что даже и при изчисленіи песчинокъ въ звѣздномъ шарѣ (ж), основываясь на извѣстныхъ нынѣ величинахъ небесныхъ тѣлъ и разстояніяхъ ихъ, найденное имъ число будетъ слишкомъ доспащочно. Замѣчу только для чисташелѣй, коимъ главныя основанія Астрономіи не извѣстны, что шаръ неподвижныхъ звѣздъ есть только кажущійся, дѣйствительно же сіи свѣтила, по вѣроятнѣйшему обще принятому между Астрономами мнѣнію, не суть въ

(ж) То есть въ такомъ, коего радіусъ равенъ разстоянію солнца до ближайшей неподвижной звѣзды, хотя бы паралаксъ ея положишь въ 1".

равномъ разстояніи отъ земли или солнца; что о разстояніи семь мы имѣемъ точное понятіе токмо оприцательное, а именно: знаемъ только, что ближайшая неподвижная звѣзда отъ солнца далѣе, нежели на 100,000 радіусовъ міра; касательно же самыхъ дальнѣйшихъ, то предъ ихъ разстояніемъ исчезаетъ всякое измѣреніе или изчисленіе, и даже самое воображеніе теряется во глубинѣ небесъ, такъ что предѣлы вселенной безъ сомнѣнія навсегда останутся извѣстными токмо Единому ея Создателю.



Скажемъ еще нѣчто о древней Теоріи пропорцій, которую можешь бышь слѣдовало издавъ прежде Эвклида а особливо Архимеда. Излишне было бы распространяться о пользѣ и важности ея предмѣта. Тѣмъ, кои читали или покушались читать древнихъ Геометровъ, извѣстно, что она есть ключъ къ уразумѣнію ихъ твореній, и содержишь въ себѣ столько ис-

тинъ, нынѣ забытыхъ или оставлен-
ныхъ, что безъ знанія оныхъ даже
самый искусный въ нынѣшней Ана-
лишикъ едва ли можетъ понимать са-
мыя простыя предложенія древнихъ,
каковы, на примѣръ, Архимеда въ Кни-
гахъ о шарѣ и цилиндрѣ. Впрочемъ
сія трудность зависишь не столько
отъ сущности предмѣта, сколько отъ
образа изложенія онаго (чрезъ по-
средство линій), а наипаче отъ того,
что полнаго систематическаго сочи-
ненія о пропорціяхъ величинъ до насъ
не дошло, кромѣ V книги Началь,
содержащей однакожь токмо 25 глав-
ныхъ предложеній. Цѣль изданія на-
стоящей Теоріи состоишь въ томъ,
дабы по возможности удалишь сіи
препятствія. Для сего къ 25 упомя-
нутымъ предложеніямъ присовокуплены
изъ швореній древнихъ еще 20 (*); шѣ

(*) Большая часть изъ нихъ помѣщены уже были
въ примѣчаніяхъ къ книгамъ: *Эвклидовыя начала*

изъ нихъ, коихъ доказательствъ ни гдѣ найши не можно было, доказаны вновь изъ тѣхъ же основаній, какія предположилъ Эвклидъ; и всей вообще теоріи данъ видъ алгебраическій, чрезъ приложеніе къ ней знакоположенія, нынѣ употребляемаго. Можно бы еще болѣе всѣ ея правила сблизить съ принятыми нынѣ въ Магематику, перемѣнивъ выраженіе предложеній и предположивъ величины изображенныя числами: но первое препятствовало бы къ достиженію главной цѣли, то есть къ уразумѣнію древнихъ, а второе уничтожило бы важнѣйшее достоинство Теоріи, то есть ея всеобщность.

восемь книгъ, содержащихъ Основанія Геометріи 1819 и Архимеда двѣ Книги о шарѣ и цилиндрѣ, Измѣреніе круга и Леммы 1823. Но доказательства оныхъ произведены чрезъ посредство линій.



АРХИМЕДА

ПСАММИТЪ.

ГОСУДАРЬ !

Есть люди, которые думаютъ, что число песчинокъ бесконечно. Я не говорю о пескѣ, находящемся около Сиракузъ и въ прочихъ мѣстахъ Сициліи, но о всемъ онаго количествѣ въ странахъ какъ обитаемыхъ, такъ и не обитаемыхъ. Другіе же полагаютъ, что хотя таковое число и не бесконечно, но что большаго, нежели оно, невозможно выразить. Еслилибъ шѣ, кои думаютъ такимъ образомъ, вообразили себѣ громаду песку, равную массѣ цѣлой земли, такъ чтобъ онымъ наполнены были всѣ ея пропасты и глубина морская, даже

до вершинъ высочайшихъ горъ; но конечно они еще менѣе повѣрили бы, что легко назвать число и сего большее. Напрошивъ этого, я поспѣраюсь доказать съ геометрическою точностію, кѣмъ, Государь, Вы убѣдились, что между числами изображенными мною въ книгахъ, приписанныхъ Зевксиппу (1), есть такія, которыя больше числа песчинокъ, вмѣщающихся въ пространствѣ равномъ величинѣ не только земли, сказаннымъ образомъ наполненной, но и цѣлаго міра.

Вамъ извѣстно, Государь, что міромъ многіе Аспрономы называють шаръ, котораго центръ шопъ же что и земли, а радиусъ равенъ прямой, соединяющей центръ земли съ центромъ солнца. Но Аристархъ Самоскій, опровергая сіе мѣніе въ написанныхъ имъ противъ Аспрономовъ Предложеніяхъ, выводилъ изъ нихъ, что міръ гораздо больше, нежели теперь сказано. Онъ полагаетъ, что неподвижныя звѣзды и солнце не перемѣняють мѣста, что земля вращается по окружности круга около солнца, которое спойтъ въ серединѣ

орбиты ея, и что шаръ неподвижныхъ звѣздъ, имѣющій одинъ и тотъ же центръ съ солнцемъ, есть таковъ, что окружность круга, описываемая, по его предположенію, землею, имѣетъ къ разстоянію неподвижныхъ звѣздъ тоже отношеніе, какое центръ шара къ поверхности онаго. Но явно, что сіе не возможно: ибо какъ центръ шара не имѣетъ никакой величины, то и нельзя допустить, чтобы онъ имѣлъ какое либо отношеніе къ поверхности шара^(а). Надобно думать, что ^{оп. 4. V.} Аристотель разумѣлъ слѣдующее: Если принять землю какъ бы за центръ міра, то какое отношеніе имѣетъ земля къ упомянутому шару міра, тоже имѣетъ и шаръ, коего кругъ предполагается описаннымъ движеніемъ земли, къ шару неподвижныхъ звѣздъ (2). Поэтому что онъ доказательствъ свои выводитъ изъ предположенія сихъ явленій; наипаче же потому, что

(а) Знакъ (*) показываетъ ссылку на Евклидовы Начала, изд. 1819 г.; а знакъ (†) на Архимедовы Творенія, изд. 1823 г.

шаръ, въ коемъ полагаешь землю движущеюся, онъ, какъ кажется, считается равнымъ шару, который мы назвали міромъ.

Итакъ я скажу, что если бы былъ шаръ песку, каковъ Ариспархомъ предполагается шаръ неподвижныхъ звѣздъ, то можно доказать, что между числами названными въ книгѣ Началь, есть такія, кои больше числа песчинокъ содержащихся въ шаковомъ шарѣ. А именно, предполагая слѣдующее: во первыхъ, что окружность земли имѣетъ около трехъ сотъ мириадъ (3) стадій (4), но не болѣе: ибо нѣкоторые старались доказать, какъ не безъизвѣстно Вамъ, Государь, что она имѣетъ около тридцати мириадъ стадій: но я пересчитаю гораздо далѣе и полагаю оную въ десять разъ большею, то есть въ триста мириадъ (5), но не болѣе. Пошомъ, что поперечникъ земли больше поперечника луны, а поперечникъ солнца больше поперечника земли: все сіе принимаю, основываясь на большей части вышепомянутыхъ Астрономовъ. И еще, что поперечникъ солнца почти тридцатикратный

поперечника луны, но не болѣе (6). Ибо изъ сказанныхъ Астрономовъ Эвдоксій утверждаетъ, что оный почти девятикратный; Фидій, сынъ Акунастра, говоритъ что двѣнадцатикратный; и наконецъ Аристархъ старается доказать, что оный больше нежели восемнадцатикратный, а меньше нежели двадцатикратный: но я, дабы удалишь всякое возраженіе прошиву доказательства моего предложенія, переслушаю далѣе и полагаю, что поперечникъ солнца почти тридцатикратный поперечника луны, но не болѣе. При томъ, что поперечникъ солнца больше стороны тысячеугольника вписаннаго въ наибольшемъ кругѣ міра; и сіе полагаю основываясь на мнѣніи Аристарха, который утверждаетъ, что видимая величина солнца есть семьсотъдвадцатая часть его орбиты (7), называемой Зодіакомъ. Я старался и собственнымъ наблюденіемъ взявъ помощію особеннаго прибора уголъ солнца, имѣющій вершину въ глазѣ, хотя сіе учинишь съ успѣхомъ весьма не легко: ибо ни глаза, ни руки, ни инструмены, при

семь употребляемые, недостаточны для измѣренія съ совершенною точностію. Впрочемъ, здѣсь не нужно разпространяться о семъ, какъ о такомъ предметѣ, о которомъ много уже говорено было, пѣтъ паче, что вразсужденіи доказательствъ моего предложенія, достаточно будетъ взять одинъ уголь, который былъ бы не больше угла, объемлющаго солнце и имѣющаго вершину свою въ глазѣ наблюдателя, а другой, который былъ бы не меньше угла, объемлющаго солнце и имѣющаго вершину въ центрѣ же глаза.

Для сего, положивъ длинную линію на плоскости, помѣщенной въ такомъ мѣстѣ, изъ котораго можно видѣть возходящее солнце, и потчасъ по возхожденіи онаго, поставилъ на линію отвѣсно маленькій цилиндръ, и коль скоро солнце показалось на горизонтѣ и слѣдовательно еще можно было на него смотрѣть (8), направилъ линію прямо къ солнцу, помѣстивъ на концѣ ея глазъ, а между глазомъ и солнцемъ, цилиндръ такъ, что бы онымъ солнце совсѣмъ закрывалось:

попомъ сѣпаль оподвигать онѣ глаза цилиндръ до шѣхъ поръ, пока едва только начало по обѣимъ его сторонамъ показываться солнце, и шупъ же остановилъ оный. Еспѣли бы глазъ видѣлъ солнце не болѣе какъ одною почкою, то, проведя онѣ конца линѣйки, при коемъ онѣ помѣщенъ былъ прямъя касательныя къ цилиндру, уголь содержимый сими прямыми былъ бы меньше угла, объемлющаго солнце и имѣющаго вершину въ глазѣ; попому что онѣ солнца нѣчто видимо было по обѣимъ сторонамъ цилиндра: но поелику глазъ усматриваетъ предметы не одною почкою, а частію своею, имѣющею нѣкоторую величину, то я взялъ еще цилиндрикъ, (9) коего поперечникъ не меньше ширины зрачка, поставилъ оный на краю линѣйки, при коемъ помѣщенъ глазъ, и проведя къ сему и къ прежнему цилиндру, двѣ касательныя, получилъ между оными уголь, который меньше угла объемлющаго солнце и имѣющаго вершину въ глазѣ. Цилиндрикъ же, который былъ бы въ поперечникѣ не меньше ширины зрач-

ка, находишься слѣдующимъ образомъ. Беруся два тонкіе и одинакой величины цилиндрика, одинъ бѣлый а другой не бѣлый, и помѣщаются передъ глазомъ шакъ, чѣобы бѣлый былъ дальше отъ него, а не бѣлый сколько возможно ближе, но есѣ чѣобы касался къ самому лицу. Ежели взяшые цилиндрики будутъ шонѣ ширины зрачка, то глазъ, объемля цилиндрикъ, помѣщенный возлѣ лица, увидишь другой, то естѣ бѣлый, и пришомъ весь, когда будешъ многимъ шонѣ, а когда не многимъ, то нѣкопорыя шокмо его часпи, по обѣимъ сторонамъ ближайшаго. Слѣдовашельно, естѣли взять и расположитѣ сказаннымъ образомъ два цилиндрика шаккой толщины, чѣобы по оной одинъ закрывалъ другой, не закрывая однакожъ большаго пространства, то поперечникъ или толщина каждаго изъ шаковыхъ цилиндриковъ, будетъ нѣкопорымъ образомъ не меньше ширины зрачка.

Дабы взятьъ уголъ, который былъ бы не меньше угла, объемлющаго солнце и имѣющаго вершину въ глазѣ, я началъ отъ

глаза оподвигать мало по малу цилиндръ, пока онъ закрылъ солнце, и потомъ опять конца линѣйки, при коемъ находился глазъ, провелъ касательныя къ цилиндру: чрезъ что и составилъ между сихъ прямыхъ уголъ, который не меньше угла объемлющаго солнце и имѣющаго вершину въ глазѣ.

Взявъ такимъ образомъ сіи углы, и измѣривъ оныя прямымъ угломъ, я нашелъ, что большій изъ нихъ, который былъ при замѣшкѣ линѣйки, меньше нежели одна часть прямого угла раздѣленнаго на 164, а меньшій, больше нежели одна часть прямого же раздѣленнаго на 200 равныхъ частей. Изъ сего явствуетъ, что уголъ объемлющій солнце и имѣющій вершину въ глазѣ, есть меньше $\frac{1}{164}$ а больше $\frac{1}{200}$ прямого угла. (10).

Послѣ сего, докажется уже, что поперечникъ солнца больше стороны тысячеугольника вписаннаго въ наибольшемъ кругѣ міра. Вообразимъ плоскость, проведенную чрезъ центръ земли, центръ солнца и глазъ наблюдателя, когда солнце не много выше горизонта; и пусть она пресѣкаетъ

міръ по кругу ABC, землю по кругу DEF, а солнце по кругу SG; и пусть будетъ центръ земли въ Н, солнца въ К, а глазъ въ D. Проведемъ касательныя къ кругу SG, отъ D прямыя DL, DO, прикасающіяся къ нему въ N и въ T, и отъ Н прямыя НМ, НР, прикасающіяся въ R и въ X; и пусть прямыя НМ, НР пресѣкають кругъ

19. I. ABC въ А и В. Ишакъ НК больше DK, ибо полагаешся, что солнце на горизонтѣ (11): посему уголъ содержимый въ DL, DO больше угла содержаго въ НМ, НР (12). Но уголъ содержимый въ DL, DO больше нежели $\frac{1}{200}$ прямого, а меньше нежели $\frac{1}{164}$ онаго, ибо сей уголъ равенъ тому, который объемлетъ солнце, имѣя вершину въ глазѣ: посему уголъ содержимый въ НМ, НР, будетъ меньше нежели $\frac{1}{164}$ прямого; а посему прямая АВ меньше прямой, спягивающей дугу круга ABC, раздѣленнаго на 656 частей.

Но очертаніе сказаннаго многоугольника къ радіусу круга ABC имѣетъ меньшее отношеніе нежели 44 къ 7, потому что очертаніе всякаго многоугольника въ кругѣ

вписаннаго къ радіусу имѣетъ меньшее опношеніе, нежели 44 къ 7 (13). Ибо, доказано мною, какъ небезъизвѣстно Вамъ, Государь, что окружность всякаго круга больше прикрашнаго поперечника избыткомъ, который меньше нежели $\frac{1}{7}$ а больше $\frac{10}{71}$ поперечника. Посему ВА къ НК имѣетъ ^{†3, Изм. Кр.} меньшее опношеніе, нежели 11 къ 1148 (14): а посему ВА меньше нежели $\frac{1}{100}$ прямой НК. Но прямой ВА равенъ поперечникъ круга SG, ибо половина ея, прямая VA, равна KR, по равенству прямыхъ НК, НА, опъ концовъ коихъ проведены перпендикуляры, прошивулежащіе тому же углу*: * 26, I. посему явно, что поперечникъ круга SG есть меньше нежели $\frac{1}{100}$ прямой НК. А поперечникъ ЕНУ меньше поперечника круга SG, ибо кругъ DEF меньше круга SG: посему НУ, KS меньше $\frac{1}{100}$ прямой НК. Чего ради НК къ US имѣетъ меньшее опношеніе, нежели 100 къ 99 (15). Но НК не меньше HR, а SU меньше DT: посему HR къ DT имѣетъ меньшее опношеніе, нежели 100 къ 99 (16). И поселику прямоугольныхъ треугольниковъ HKR, DKT стороны KR,

КТ равны, а стороны НР, ДТ неравны, и НР большая: то уголъ содержимый въ ДТ, ДК къ углу содержимому въ НР, НК имѣетъ большее отношеніе, нежели НК къ ДК, а меньшее нежели НР къ ДТ. Ибо, ежели двухъ прямоугольныхъ преугольниковъ стороны, кои около прямого угла, однѣ равны, а другія неравны: то изъ угловъ, прилежащихъ неравнымъ сторонамъ, большій къ меньшему имѣетъ большее отношеніе, нежели изъ споронъ, противоположащихъ прямому углу, большая къ меньшей, а меньшее, нежели изъ тѣхъ, кои около прямого угла, большая къ меньшей (17). Слѣдовательно уголъ содержимый въ DL, DO къ углу содержимому въ НР, НМ имѣетъ меньшее отношеніе, нежели НР къ DF. Сіи же имѣютъ меньшее нежели 100 къ 99: посему уголъ содержимый въ DL, DO къ углу содержимому въ НР, НМ имѣетъ меньшее отношеніе, нежели 100 къ 99 (18). И поелику уголъ содержимый въ DL, DO больше двухъсотой части прямого, то содержимый въ НМ, НР будетъ больше нежели 99 двуириадныхъ

частей, и слѣдовательно больше одной двѣдшипретней части прямого (19). Посему ВА больше прямой спягивающей дугу круга ABC раздѣленного на 812 частей. Но поперечникъ солнца равенъ АВ: итакъ явно, что поперечникъ солнца больше стороны тысячеугольника.

Предположивъ сіе, докажемъ еще, что поперечникъ міра меньше мириадокрашнаго поперечника земли; и что поперечникъ міра меньше нежели мириада мириадъ разъ 100 стадій. И дѣйствительно, поелику положено, что поперечникъ солнца не больше, нежели тридцатикрашный поперечника луны, а поперечникъ земли больше поперечника луны; то явно, что поперечникъ солнца меньше нежели тридцатикрашный поперечника земли. Еще же, поелику доказано, что поперечникъ солнца больше стороны тысячеугольника вписаннаго въ наибольшемъ кругѣ міра: посему явно, что очертаніе сказаннаго тысячеугольника меньше нежели тысячекрашное поперечника солнца. Но поперечникъ солнца меньше нежели тридцатикрашный по-

перечника земли: слѣдственно очерпаніе тысячеугольника меньше нежели примириадокрапное поперечника земли. Ишакъ, поелику очерпаніе сего тысячеугольника естъ меньше нежели примириадокрапное поперечника земли, и больше нежели прикрапное поперечника міра, ибо доказано, что поперечникъ всякаго круга меньше нежели прешья часть очерпанія всякаго вписаннаго въ томъ кругѣ многоугольника, имѣющаго стороны равныя, и числомъ

гль 3, Изъ К. больше шесши[†]: посему поперечникъ міра, естъ меньше нежели мириадокрапный поперечника земли. (20) А что поперечникъ міра, который меньше нежели мириадокрапный поперечника земли, будеть меньше нежели мириада мириадъ разъ 100 спадій, явснвуетъ изъ слѣдующаго: Поелику полагаешся окружность земли не больше прехъ сошъ мириадъ спадій; окружность же земли естъ больше нежели прикрапная поперечника ея, ибо окружность всякаго круга больше нежели прикрапная своего поперечника; посему явно, что поперечникъ, земли меньше сна мириадъ спадій:

а какъ поперечникъ міра меньше нежели мириадократный поперечника земли; слѣдственно явствуетъ, что поперечникъ міра меньше сѣмь мириадъ мириадъ сѣмь. Таковы суть предположенія о величинахъ и разстояніяхъ.

Вразсужденіи же песку я предполагаю: во первыхъ, что ежели взять количество песку не больше маковаго зерна, то число содержащихся въ немъ песчинокъ будетъ не больше мириады. Во вторыхъ, что поперечникъ сего зерна не меньше сороковой части дюйма (21). Последнее полагаю основываясь на слѣдующемъ опытѣ: положилъ на маленькой линѣйкѣ маковыя зерна впрямъ, такъ, чтобы онѣ взаимно касались, и нашелъ, что двѣнадцать пять зеренъ занимали въ длину больше дюйма. Но я полагаю маковое зерно, и того меньше, именно, что оно въ поперечникѣ только не меньше сороковой части дюйма: дабы и сѣмь обстоятельствъ не могло быть никакого прекословія противъ того, что буду доказывать. И вошь мои всѣ предположенія. Сверхъ всего этого, я починаю за по-

лезное изложивъ здѣсь номенклатуру чиселъ, ибо опасаясь, когда ничего о семъ не скажу, дабы шѢ, коимъ не случалось чищать книги, приписанной мною Зевксипу, не впади въ заблужденіе.

Числа, кои идушъ до мириадъ, имѣють извѣстныя названія, равно какъ и шѢ, кои идушъ далѣе, до мириады мириадъ; ибо въ нихъ повторяющіяся прежнія. Сказанныя теперь числа, шо есть, кои идушъ до мириады мириадъ, назовемъ первыми, а мириаду мириадъ первыхъ чиселъ назовемъ единицею вторыхъ чиселъ, и станемъ счищать сими единицами, ихъ десятками, сотнями, тысячами, мириадами, даже до мириады мириадъ. Потомъ, мириаду мириадъ вторыхъ чиселъ назовемъ единицею третьихъ, и станемъ счищать третьихъ чиселъ единицами, ихъ десятками, сотнями, тысячами и мириадами, даже до мириады мириадъ. Такимъ же образомъ, мириаду мириадъ третьихъ чиселъ назовемъ единицею четвертыхъ, мириаду мириадъ четвертыхъ чиселъ назовемъ единицею пятыхъ, и будемъ продолжать симъ образомъ называть

слѣдующія числа, даже до мириады мириадъ чиселъ мириадомириадныхъ. Таковаго количества чиселъ будешь конечно для всего достапочно; однако же можно еще ипши далѣе, слѣдующимъ образомъ: Назовемъ, сказанныя нами числа, числами перваго періода (22), а послѣднее число перваго періода, назовемъ единицею втораго періода, и опяшь мириаду мириадъ первыхъ чиселъ втораго періода, назовемъ единицею вторыхъ чиселъ сегоже періода, и, подобно сему, послѣднее изъ нихъ назовемъ единицею третьихъ чиселъ втораго же періода, и будемъ продолжашь симъ способомъ называть слѣдующія числа даже до мириады мириадъ чиселъ мириадомириадныхъ втораго періода. Потомъ назовемъ послѣднее число втораго періода единицею первыхъ чиселъ третьяго періода, и такъ далѣе, продолжая симъже образомъ называть слѣдующія числа, даже до мириады мириадъ чиселъ мириадомириадныхъ періода мириадомириаднаго.

Предположивъ сію номенклатуру, естли будешь, начиная опъ единицы, числа не-

прерывнопропорціональнѣй, коихъ второй членъ десяти: то восемь первыхъ членовъ, включая и единицу, будутъ шѣ, кои называются первыми, слѣдующія другія восемь, кои называются вторыми, такимъ же образомъ и изъ прочихъ всякія восемь чиселъ, или всякая октада, будетъ получать наименованіе отъ разстоянія ея отъ октады первыхъ чиселъ. Слѣдственно восьмое число первой октады будетъ тысяча мириадъ, первое второй октады, которое есть единица вторыхъ чиселъ, будетъ мириада мириадъ, ибо оно десятикратное числу ему предшествовавшаго; восьмое число второй октады будетъ тысяча мириадъ вторыхъ чиселъ, первое числа третьей октады, которое есть единица третьихъ чиселъ, будетъ мириада мириадъ, чиселъ вторыхъ, ибо оно десятикратное предыдущаго: итакъ очевидно, что будутъ многія октады, какъ уже сказано прежде.

Не бесполезно также замѣнить еще слѣдующее. Если будетъ рядъ непрерывнопропорціональныхъ чиселъ, начиная отъ

единицы, и естѣли два члена онаго перемножашся между собою; то произведеніе будетъ членъ сегоже ряда, столько удаленный отъ большаго множителя, сколько удаленъ меньшій отъ единицы; онъ же будетъ отъ единицы однимъ членомъ меньше удаленъ прошиву того, на сколько удалены отъ нее оба множителя. Ибо пусть будутъ $A, B, C, D, E, F, G, H, K, L, M$, непрерывнопропорціональныя числа, начиная отъ единицы, такъ что A есть единица, и пусть произведеніе D на H будетъ X . Возьмемъ ряда членъ M , который на столько удаленъ отъ H , на сколько D отъ единицы. Надлежитъ доказать, что X равно M . Поскольку въ числахъ $A, B, C, D, E, F, G, H, K, L, M$ пропорціональныхъ, на сколько D удалено отъ A , на столько M отъ H ; то какъ D къ A , такъ M къ H . Но D есть D -кратное числа A ; посему и M есть D -кратное числа H : слѣдова- *d, v. тельно M равно X . Инакъ явно, что произведеніе H на D есть членъ ряда, и удалено отъ большаго изъ множителей на столько членовъ, на сколько меньшій уда-

ленъ опъ единицы. Сверхъ того явно, что сіе произведеніе будетъ удалено опъ единицы однимъ членомъ меньше противу числа членовъ, коими удалены оба вѣснѣ множенія опъ единицы же. Ибо число членовъ, А, В, С, D, E, F, G, H, есть то, на сколько удалено H опъ единицы; а число членовъ K, L, M, есть однимъ меньше, противу числа членовъ опъ D до единицы, потому что число оныхъ вѣснѣ съ H будетъ равно сему послѣднему.

Все сіе опчаспи предположивъ а опчаспи доказавъ, мы уже можемъ прислушати къ нашему предложенію. Поелику предположено, что поперечникъ маковаго зерна не меньше $\frac{1}{40}$ дюйма; то явно, что шаръ, коего поперечникъ въ дюймъ, будетъ содержать въ себѣ не больше 64000 макавыхъ зеренъ: ибо опъ столько крапъ больше шара коего поперечникъ въ $\frac{1}{40}$ дюйма, поелику доказано, что шары суть взаимно

18, XII. въ утроенномъ отношеніи поперечниковъ. Но предположено было, что въ объемѣ песку, равномъ маковому зерну, число пе-

счинокъ не больше мириады: посему явно, что число песчинокъ содержащихся въ шарѣ, коего поперечникъ въ дюймъ, будетъ не больше мириады разъ шести мириадъ чешырехъ тысячъ; каковое число содержишь въ себѣ шесть единицъ чиселъ вторыхъ и чешыре тысячи мириадъ чиселъ первыхъ: слѣдственно меньше десяти единицъ чиселъ вторыхъ.

Шаръ, коего поперечникъ во 100 дюймовъ, равенъ сто мириадъ разъ взятому шару, коего поперечникъ въ одинъ дюймъ, ибо шары суть взаимно въ упрощенномъ отношеніи поперечниковъ. Ишакъ, есть либъ былъ шаръ песку, имѣющій поперечникъ въ 100 дюймовъ; то явно, что число песчинокъ было бы меньше произведенія десяти единицъ чиселъ вторыхъ на сто мириадъ. Поелику же десяти единицъ чиселъ вторыхъ есть опъ единицы десятиый пропорціональный членъ ряда, возрасшающаго въ десятикратномъ отношеніи, а сто мириадъ, седьмой опъ единицы тогоже ряда: посему явно, что произведеніе ихъ будетъ сего же ряда шести-

надцатый членъ, также отъ единицы. Ибо доказано, что шаковое произведеніе удалено отъ единицы однимъ членомъ меньше противу того, на сколько отъ нее удалены оба члена, онаго множищели. Но между сими шестнадцатью членами, восемь первые, включая единицу, принадлежахъ къ числамъ называемымъ первыми, а другіе слѣдующіе восемь къ называемымъ вторыми, припомъ послѣдній изъ сихъ есть тысяча мириадъ чиселъ вторыхъ: посему явно, что число песчинокъ содержащихся въ шарѣ, имѣющемъ поперечникъ во 100 дюймовъ, будетъ меньше нежели тысяча мириадъ чиселъ вторыхъ.

Шаръ, коего поперечникъ въ мириаду дюймовъ, равенъ сто мириадъ разъ взятому шару, коего поперечникъ во сто дюймовъ. Ишакъ, естлибъ былъ шаръ песку, имѣющій поперечникъ въ мириаду дюймовъ; то явно, что число песчинокъ, въ немъ содержащихся, было бы меньше произведенія тысячи мириадъ чиселъ вторыхъ на сто мириадъ. Поселику же тысяча мириадъ чиселъ вторыхъ есть отъ еди-

ицы шеснадацый пропорціональный членъ, а сто мириадъ есть ошъ единицы седьмой, одного и того же ряда: посему явно, что произведеніе оныхъ будетъ сего же ряда двадцать вторый членъ также ошъ единицы. Но между сими двадцатью двумя членами, первые восемь, включая единицу, принадлежатъ къ числамъ называемымъ первыми, слѣдующіе другіе восемь къ называемымъ вторыми, а остальные шесть къ называемымъ прешьими, при томъ послѣдній изъ нихъ есть десять мириадъ чиселъ прешьихъ: посему явно, что число песчинокъ содержащихся въ шарѣ, имѣющемъ поперечникъ въ мириадѣ дюймовъ, будетъ меньше десяти мириадъ чиселъ прешьихъ. И какъ шаръ, имѣющій поперечникъ въ спадію, меньше шара, имѣющаго поперечникъ въ мириадѣ дюймовъ (23): посему явно, что число песчинокъ содержащихся въ шарѣ, коего поперечникъ въ спадію, будетъ меньше десяти мириадъ чиселъ прешьихъ.

Шаръ, коего поперечникъ во сто спадій, равенъ сто мириадъ разъ взятому шару, коего поперечникъ въ одну спадію.

Итакъ, естлибъ былъ шаръ песку, имѣющій поперечникъ во сто снадій; шо явно, что число песчинокъ, въ немъ содержащихся, было бы меньше произведенія десяти мириадъ чиселъ трешьихъ на сто мириадъ. Поелику же десять мириадъ чиселъ трешьихъ есть отъ единицы двадцать вторый пропорціональный членъ, а сто мириадъ есть отъ единицы седьмой, одного изъ того же ряда: посему явно, что произведеніе ихъ будетъ сего же ряда двадцать восьмой членъ, также отъ единицы. Но между сими двадцатью восьмью членами, первые восемь, включая единицу, принадлежатъ къ числамъ, называемымъ первыми, слѣдующіе другіе восемь къ называемымъ вторыми, слѣдующіе еще другіе восемь къ называемымъ трешьими, а осмальные чешыре къ называемымъ четвертыми, припомъ послѣдній изъ нихъ есть тысяча единицъ чиселъ четвертыхъ: посему явно, что число песчинокъ содержащихся въ шарѣ, коего поперечникъ во сто снадій, будетъ меньше тысячи единицъ чиселъ четвертыхъ.

Шаръ, коего поперечникъ въ мириадѣ

спадій, равень сто миріадъ разъ взятому шару, коего поперечникъ во сто спадій. И такъ, естлибъ былъ шаръ песку, имѣющій поперечникъ въ миріаду спадій; по явнѣ, что число песчинокъ его было бы меньше произведенія тысячи единицъ чиселъ четвертыхъ на сто миріадъ. Поелику же тысяча единицъ чиселъ четвертыхъ есть опъ единицы двадцатьвосьмой пропорціональный членъ, а сто миріадъ, опъ единицы седьмой, одного тогоже ряда: посему явнѣ, что произведеніе оныхъ будетъ того же ряда шридцать четвертый членъ, также опъ единицы. Но между сими шридцатью чептырьмя членами, первые восемь, включая единицу, принадлежатъ къ числамъ называемымъ первыми, слѣдующіе другіе восемь къ называемымъ вторыми, слѣдующіе еще другіе восемь къ называемымъ третими, слѣдующіе за сими восемь къ называемымъ четвертыми, а два оснальные къ называемымъ пятыми, приномъ послѣдній изъ нихъ есть десять единицъ пятыхъ: посему явнѣ, что число песчинокъ содержащихся въ шарѣ, коего попе-

речникъ въ мириадѣ спадій, будетъ меньше десяти единицъ чиселъ пятыхъ.

Шаръ, коего поперечникъ во сто мириадъ спадій, равенъ сто мириадъ разъ взятому шару, коего поперечникъ въ мириадѣ спадій. Итакъ, еслибы былъ шаръ песку, имѣющій поперечникъ во сто мириадъ спадій; то явно, что число песчинокъ онаго было бы меньше произведенія десяти единицъ пятыхъ на сто мириадъ. Поскольку же десять единицъ пятыхъ, есть отъ единицы тридцать четвертый пропорціональный членъ, а сто мириадъ, отъ единицы седьмой, одного того же ряда: посему явно, что произведеніе оныхъ будетъ сороковый членъ ряда, также отъ единицы. Но между сими сорока членами, первые восемь, включая единицу, принадлежатъ къ числамъ называемымъ первыми, слѣдующіе другіе восемь къ называемымъ вторыми, слѣдующіе еще другіе восемь къ называемымъ третьими, слѣдующіе за третьими къ называемымъ четвертыми, а слѣдующіе за четвертыми къ называемымъ пятыми, при томъ послѣдній изъ

нихъ есть тысяча мириадъ чиселъ пятыхъ: посему явно, что число песчинокъ содержащихся въ шарѣ, коего поперечникъ во сто мириадъ стадій, будетъ меньше тысячи мириадъ чиселъ пятыхъ.

Шаръ, коего поперечникъ въ мириадъ мириадъ стадій, равенъ сто мириадъ разъ взятому шару, коего поперечникъ во сто мириадъ стадій. Итакъ, еслибы былъ шаръ, имѣющій поперечникъ въ мириадъ мириадъ стадій; то явно, что число песчинокъ было бы меньше произведенія тысячи мириадъ чиселъ пятыхъ на сто мириадъ. Посему же тысяча мириадъ чиселъ пятыхъ есть оная единица сороковый пропорціональный членъ, а сто мириадъ, оная единица седмый, одного и того же ряда: посему явно, что произведение оныхъ будетъ того же ряда сорокъ шестый членъ, также оная единица. Но между сими сорока шестью членами, первые восемь, включая единицу, принадлежатъ къ числамъ называемымъ первыми, слѣдующіе другіе восемь къ называемымъ вторыми, еще слѣдующіе восемь къ называемымъ треть-

ими, слѣдующіе за шрентъими восемьъ къ называемымъ чешвершными, слѣдующіе за чешвершными восемьъ къ называемымъ пяпыми, а оспальные шеспъ къ называемымъ шеспными, припомъ послѣдній изъ нихъ еспъ десятиа мириадъ чиселъ шеспныхъ: посему явно, что число песчинокъ содержащихся въ шарѣ, коего поперечникъ въ мириадѣ мириадъ спадій, буденъ меньше десятиа мириадъ чиселъ шеспныхъ.

Шаръ, коего поперечникъ во сто мириадъ мириадъ спадій, равенъ сто мириадъ разъ взятому шару, коего поперечникъ въ мириадѣ мириадъ спадій. Итакъ, еспъ либъ былъ шаръ песку, имѣющій поперечникъ во сто мириадъ мириадъ спадій; то явно, что число песчинокъ было бы меньше произведенія десятиа мириадъ чиселъ шеспныхъ на сто мириадъ. Посемику же десятиа мириадъ чиселъ шеспныхъ еспъ опъ единицы сорокъ шеспый пропорціональный членъ, а сто мириадъ еспъ опъ единицы седмый, одного и того же ряда: посему явно, что произведеніе оныхъ буденъ по-тожъ ряда пятадесяшь вшорый членъ, такъ

же отъ единицы. Но между сими пятьюдесятью двумя членами, первые сорокъ восемь, включая единицу, принадлежатъ къ числамъ называемымъ первыми, вторыми, третьими, четвертыми, пятыми и шестыми, а остальные четыре къ числамъ седмымъ, приномъ послѣдней изъ нихъ есть тысяча единицъ чиселъ седмыхъ: по сему явно, что число песчинокъ, содержащихся въ шарѣ, коего поперечникъ во сто мириадъ мириадъ снадій, будетъ меньше тысячи единицъ чиселъ седмыхъ.

Поелику же доказано, что поперечникъ міра составляетъ меньше нежели сто мириадъ мириадъ снадій; то явно, что число песчинокъ, содержащихся въ шарѣ равномъ міру, меньше тысячи единицъ чиселъ седмыхъ. Слѣдовательно доказано, что число песчинокъ, содержащихся въ шарѣ, равномъ тому, каковымъ полагаютъ большая часть Астрономовъ шаръ міра, будетъ меньше тысячи единицъ чиселъ седмыхъ.

Теперь мы докажемъ, что число песчинокъ, содержащихся въ шарѣ, величиною равномъ шару неподвижныхъ звѣздъ или

небесному, предполагаемому Ариспархомъ, будетъ меньше тысячи мириадъ чиселъ седмыхъ. И дѣйствительно, поелику предположено, что земля къ шару, называемому міромъ, имѣетъ такое отношеніе, что шаръ называемый міромъ, къ шару неподвижныхъ звѣздъ, предполагаемому Ариспархомъ, и что поперечники сихъ шаровъ имѣютъ взаимно отношеніе; и поелику доказано, что поперечникъ міра есть меньше мириаду разъ взятаго поперечника земли: то явно, что поперечникъ шара неподвижныхъ звѣздъ будетъ меньше мириаду разъ взятаго поперечника міра (24). Но шары сунъ взаимно въ упрощенномъ отношеніи своихъ поперечниковъ: посему явно, что шаръ неподвижныхъ звѣздъ, предполагаемый Ариспархомъ, будетъ меньше, нежели мириаду мириадъ разъ мириадъ взятый шаръ міра. Доказано же, что число песчинокъ, содержащихся въ шарѣ, каковъ шаръ міра, меньше тысячи единицъ чиселъ седмыхъ: посему явно, что если бы былъ шаръ песку, величиною такой, каковымъ Ариспархъ предполагаетъ шаръ

неподвижныхъ звѣздъ; то число песчинокъ, былобы меньше произведенія тысячи единицъ чиселъ седмыхъ на мириаду мириадъ разъ мириадъ. Поелику же тысяча единицъ чиселъ седмыхъ есть ошъ единицы пятьдесять второй пропорціональный членъ, а мириада мириадъ разъ мириадъ, ошъ единицы тринадцатый, одного и того же ряда; посему явно, что произведеніе ихъ будетъ шестьдесять четвертый членъ того же ряда. Но сіе число есть восьмое чиселъ восьмыхъ, то есть оно означаетъ тысячу мириадъ чиселъ восьмыхъ: слѣдовательно явно, что число песчинокъ содержащихся въ шарѣ, каковъ неподвижныхъ звѣздъ, предполагаемый Аристархомъ, будетъ меньше тысячи мириадъ чиселъ восьмыхъ.

Государь! Сказанное мною конечно покажется невѣроятнымъ для многихъ изъ ихъ, кои не занимались Математическими науками: но будетъ достоверно, поелику доказано, для упражнявшихся въ оныхъ, когда внимательно разсмотримъ что яскалъ о разстояніяхъ и величинѣ земли,

солнца, луны и цѣлаго міра. Впрочемъ, я съ своей стороны нахожу, что полезно было бы, когда бъ и другіе разобрали сей предмѣтъ еще обстоятельнѣе.

ПРИМѢЧАНІЯ

КЪ ПСАММИТУ.

(1) Архимедъ говоритъ здѣсь объ Ариеметикѣ своей, подъ названіемъ *Архит*, кошорая до насъ не дошла.

(2) Поелику центръ шара вразсужденіи поверхности есть ничто; по Аристархово выраженіе, повидимому означаетъ, что радіусъ орбиты земли въ сравненіи съ радіусомъ небеснаго шара, или неподвижныхъ звѣздъ, есть ничтожный, или какъ нынѣ выражаются, безконечно малый.

(3) Мириада значить 10,000. См. въ Журналѣ Департаментна Народнаго просвѣщенія N N° V—VII. 1822 г. статью: *Опытъ Практической Ариеметики древнихъ Грековъ*.

(4) Греческая стадія имѣла въ себѣ около 504 фузовъ и $4\frac{1}{2}$ дюймовъ Англійской мѣры.

(5) Триста мириадъ стадій будетъ около 432,321 версты, слѣдственно слишкомъ въ десять разъ больше населяющаго; ибо земля, какъ извѣстно, имѣетъ въ окружности почти 37,500 верстъ.

(6) Поперечникъ солнца почти во 100 разъ больше поперечника земли, а сей почти въ 4 раза больше поперечника луны: слѣдственно поперечникъ солнца почти въ 440 разъ больше поперечника луны.

(7) То есть въ 30'. Нынѣ извѣстно, что величина видимаго поперечника солнца есть, въ перигей 32' 38⁰⁰.6, а въ апогей 31' 33⁰⁰.8.

(8) Когда смотрѣшь на солнце при его восхожденіи или захожденіи, то, какъ извѣстно, свѣтъ онаго менѣе шаягостенъ для глазъ, нежели въ другое время дня. Ослабляя же свѣтъ, кажется тогда еще не знали.

(9) Въ подлинникѣ сказано: *μικρότερος τροχού*.

(10) То есть меньше 32' 55²⁵/₄₁'' а больше 27'. Нельзя не удивиться, что Архимедъ такимъ простымъ и, можно сказать, грубымъ способомъ могъ до такой степени приблизиться къ истинѣ.

(11) И дѣйствительно, когда центръ солнца на горизонтѣ, то ДК, будучи касательная къ землѣ, перпендикулярна къ ея радіусу*, пропущенному до D, и потому НК будетъ больше ДК. По мѣрѣ же того, какъ солнце поднимается надъ горизонтѣ, уголъ HDK увеличивается, и уголъ DНК уменьшается, и слѣдственно НК тѣмъ па-
19, III. мѣ, перпендикулярна къ ея радіусу, пропущенному до D, и потому НК будетъ больше ДК.
19, I. че будетъ больше, нежели ДК.

(12) Въ треугольникахъ DНК, НКК углы при

N и R прямые, сторона KN равна KR , а DK меньше (по предыдущ. примѣч.) NK : посему уголъ NDK больше угла RHK^* , а посему двукрашней больше $^{*52, I}$ двукрашнаго, то есть уголъ LDO угла MHP .

(13) Поселику изъ доказательства 3 предложения Измѣренія круга видно, что окружность круга къ поперечнику онаго имѣетъ меньшее отношеніе, нежели 22 къ 7; но очершаніе вписаннаго многоугольника меньше окружности: посему очершаніе многоугольника, вписаннаго въ кругъ, къ поперечнику онаго тѣмъ паче имѣетъ меньшее отношеніе, нежели 22 къ 7*, слѣдственно къ радіусу $^{*sl: m, V}$ имѣетъ меньшее нежели 22 къ 7, то есть, нежели 44 къ 7.

(14) Изъ предыдущаго примѣчанія слѣдуетъ, что очершаніе 656-тиугольника вписаннаго къ радіусу KN имѣетъ меньшее отношеніе, нежели 44 къ 7: посему одна сторона сего многоугольника къ KN имѣетъ меньшее, нежели $\frac{44}{656}$ или $\frac{11}{164}$ къ 7, то есть, нежели 11 къ 1148. Но AB меньше стороны: слѣдственно AB къ KN тѣмъ паче имѣетъ меньшее отношеніе, нежели 11 къ 1148. И поселику $\frac{11}{1148}$ меньше $\frac{1}{100}$, то 11 къ 1148 имѣетъ меньшее отношеніе, нежели 1 къ 100: чего ради AB къ KN тѣмъ паче имѣетъ меньшее, нежели 1 къ 100, или, что все равно, 1 къ 100 имѣетъ большее отношеніе, неже-

ли АВ къ КН. Но 1 во 100 разъ меньше числа 100: посему АВ будетъ слишкомъ во 100 разъ меньше прямой КН.

(15) Поскольку поперечникъ SG меньше нежели 100 НК; то, еслии НК раздѣлимъ на 100 равныхъ частей, будетъ SG, а шѣмъ наче НУ съ KS, меньше одной шаковой части: слѣдственно оспальная прямая US будетъ больше 99 частей: и поэтому НК къ SU имѣеть меньшее отношеніе, нежели 100 къ 99.

(16) Пусть величины А, В, С, D, Е, F будутъ такія, что А къ В имѣеть меньшее отношеніе, нежели С въ D, и что А не меньше Е, а В меньше F. Говорю, что Е къ F имѣеть меньшее отношеніе, нежели С къ D.

Послику А не меньше Е, то А къ В имѣеть *7 и 8, V. не меньшее отношеніе, нежели Е къ В.* Еще же, поскольку В меньше F, то Е къ В имѣеть *8, V. большее отношеніе, нежели къ F*. Доказано же, что А къ В имѣеть не меньшее отношеніе, нежели Е къ В: слѣдственно шѣмъ наче А къ В *13 и (55), Г. имѣеть большее отношеніе, нежели Е къ F*, то есть, Е къ F меньшее, нежели А къ В. А по положенію, А къ В имѣеть меньшее отношеніе, нежели С къ D: чего ради и Е къ F имѣеть * (55). меньшее, нежели С къ D*.

(17) Вотъ доказательство сего предложенія:

Пусть будутъ два треугольника ABC , DEF прямоугольные при B , E , въ конхъ BC равна EF , а AB больше DE . Говорю, что уголъ D къ углу A , который меньше D , имѣеть большее отношеніе, нежели AC къ DF , а меньшее, нежели AB къ DE .

Возьми BG равную ED , и пропни GC : посему GC равна DF , и уголъ CGB равенъ углу FDE *. Продолжи GC , и сдѣлай GH равную AC , *4. 1. и опъ H проведи, перпендикулярную къ продолженной AB , прямую HK , и около поперечниковъ AC , GH напниши круги, то ихъ окружности пройдушь чрезъ B , K , ибо углы при сихъ точкахъ суть прямые.

Послѣку поперечники круговъ ABC , CKH равны, то и самые круги равны. А равныхъ круговъ дуги имѣють взаимно, большая къ меньшей, большее отношеніе, нежели спягивающія ихъ прямыя: посему дуга HK къ дугѣ CB имѣеть большее отношеніе, нежели прямая HK къ прямой CB . Но какъ дуга HK къ дугѣ CB , такъ уголъ HCK къ углу CAB : посему уголъ HCK къ углу CAB имѣеть большее отношеніе, нежели прямая HK къ прямой CB , то есть, уголъ FDE къ углу CAB имѣеть большее отношеніе, нежели AC къ DF .

Теперь сдѣлай AR равную DE , и опъ R поставь перпендикулярную къ AB прямую RS , и

сдѣлай ее равною EF, и пропяти AS; посему AS
равна DF, и уголь SAR равенъ углу FDE. Пусть
SR пресѣкаетъ прямую AC въ U, и изъ точки
A радіусомъ AU напизи кругъ. Итакъ, уголь
VAU къ углу UAT имѣеть тоже отношеніе, что
33, VI. вырѣзокъ VAU къ вырѣзку UAT. Но вырѣзокъ
VAU къ вырѣзку UAT имѣеть меньшее отно-
8, шеніе, нежели къ треугольнику ARU: посему и
уголь VAU къ углу UAT имѣеть меньшее отно-
шеніе, нежели вырѣзокъ VAU къ треугольнику
ARU, и следовательно меньшее, нежели тре-
угольникъ SAU къ треугольнику UAR, то есть,
3, VII. нежели SU къ UR. Чего ради совокупленіемъ,
уголь VAT къ углу UAT имѣеть меньшее от-
6, V. ношеніе, нежели SR, то есть CB, къ UR. А
какъ CB къ UR, такъ AB къ AR: посему уголь
VAT къ углу UAT имѣеть меньшее отноше-
ніе, нежели AB къ AR, то есть, уголь FDE къ углу
CAB имѣеть меньшее отношеніе, нежели AB къ DE.

(18) То есть $\frac{100}{20000}$ къ $\frac{99}{20000}$; то есть $\frac{1}{200}$ къ $\frac{99}{20000}$.

(19) Ибо $\frac{99}{20000}$ равно $\frac{1}{202 + \frac{2}{99}}$, и следовательно

больше $\frac{1}{203}$.

(20) Среднее разстояніе земли отъ солнца
равно 23709 радіусамъ земли.

(21) Дюймъ Греческій былъ не многимъ боль-

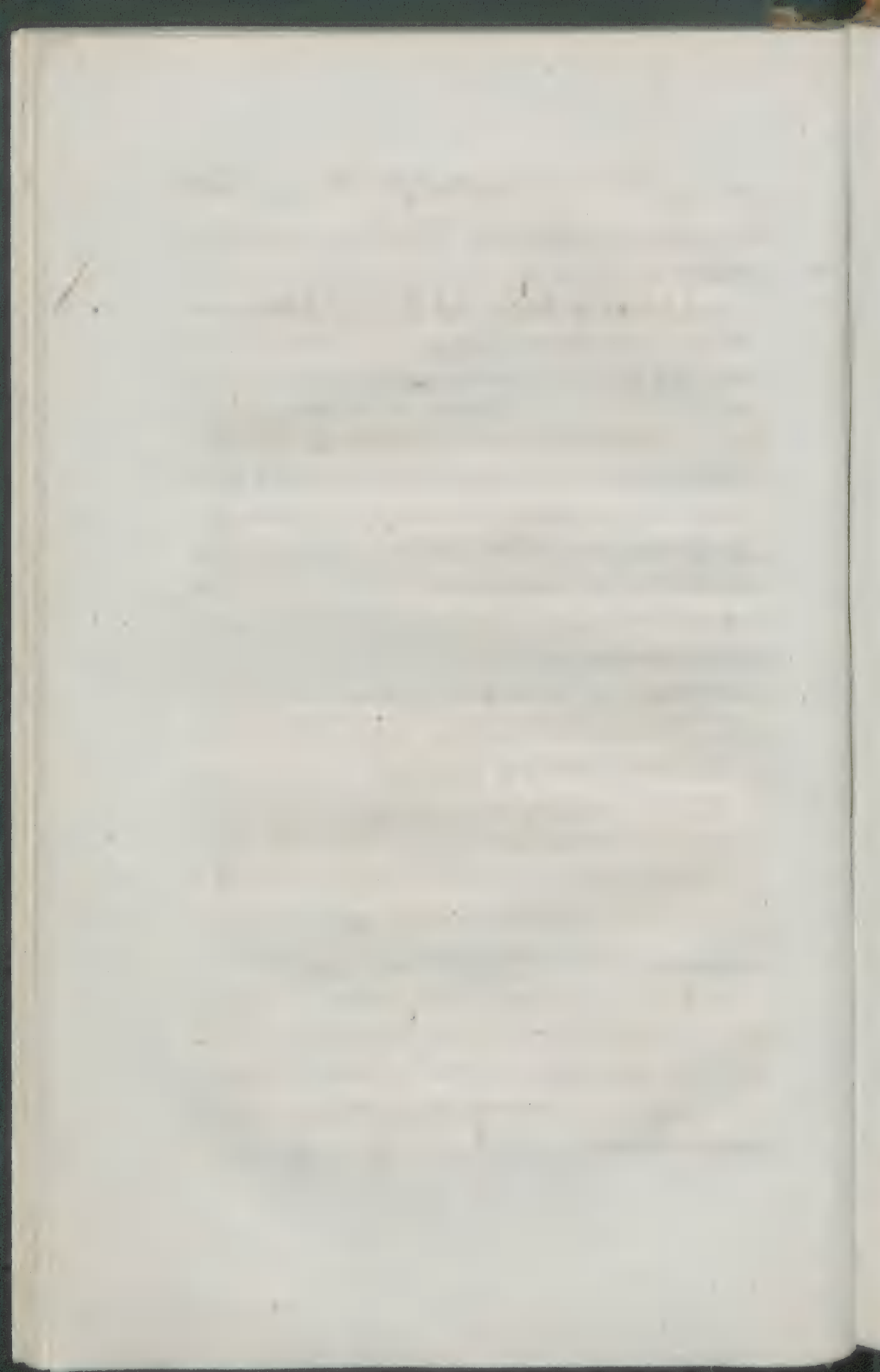
ше $\frac{3}{4}$ нашего дюйма. См. о Вѣсахъ и мѣрахъ Машинскаго, стр. 8.

(22) Следственно въ періодъ будетъ не восемь окладъ, какъ пишетъ Пейрардъ (*), а мириада мириадъ то есть 100,000,000 окладъ: ипакъ послѣднія числа перваго періода по нашей Арифметикѣ будутъ изображаться 800 миллионовъ цифръ.

(23) Въ Греческой синади считалось 9,600 дюймовъ. См. о вѣсахъ и мѣр. Машинскаго, стр. 8.

(24) По опредѣленію новѣйшей Астрономіи, разстояніе ближайшей неподвижной звѣзды отъ солнца или земли, будетъ не менѣе 100,000 радиусовъ міра.

(*) Oeuvres d'Archimède, par Peyrard. 1807, pag. 516.



~~~~~

# ОБЩАЯ ТЕОРИЯ


## ВЕЛИЧИНЪ ПРОПОРЦІОНАЛЬНЫХЪ

~~~~~

ОПРЕДѢЛЕНІЯ.

1. Если будутъ двѣ неравныя величины такія, что меньшая въ большей содержится безъ остатка; то большая называется крайною меньшей, а меньшая частною большей. — Пусть будетъ $A = nB$ (*), то величина A есть крайняя величины B , а B есть частная величины A .

(*) Большими буквами означаются величины вообще, а малыми цѣлыя числа, первыми: a, b, c, d, \dots опредѣленные, кои могутъ быть и неопредѣленными, а послѣдними: m, n, p, q, \dots шокмо неопредѣленные.



2. Когда въ двухъ бѣльшихъ величинахъ содержится двѣ меньшія одинакое число разъ n безъ остатка, каждая въ каждой; то бѣльшія называются равнокрапными меньшихъ, а меньшія равночасными бѣльшихъ. Тоже разумѣется о трехъ или болѣе величинахъ. — Напр. когда $A = nB$, а $C = nD$, то A и C суть равнокрапныя величины B и D , а B и D равночасныя величины A и C , каждая каждой.

3. Когда четыре величины суть такыя, что взявъ равнокрапно первую и ^{опр. 2.} третью*, также равнокрапно вторую и четвертую, оба раза *неопредѣленно*, будешь крапныя такія, что еслии изъ нихъ первая больше второй, то и третья больше четвертой, а еслии равна, то равна, а еслии меньше, то меньше: тогда о тѣхъ четырехъ величинахъ говорится, что первая ко второй имѣетъ такое отношеніе, какое третья къ четвертой, или: что отношеніе первыхъ двухъ равно(*).

(*) Слово *равно* въ опредѣленіи 3, и слова *больше* и *меньше* въ опр. 4 принимаются въ осо-

отношенію послѣднихъ двухъ, и обращено. — Когда, напр. величины A, B, C, D таковы, что взявъ mA, nB, mC, nD , будемъ:

еслили $mA > nB$, то $mC > nD$,

а еслили $mA = nB$, то $mC = nD$,

а еслили $mA < nB$, то $mC < nD$;

въ такомъ случаѣ говорится, что какое имѣешь отношеніе A къ B , тоже имѣешь и C къ D .

Примѣчаніе. Для краткости говорится: какъ A къ B , такъ C къ D , а пишется $A:B::C:D$.

4. Когда же четыре величины суть таковы, что взявъ равнократно первую и третью, также равнократно вторую и четвертую, каждый разъ *опредѣленно или неопредѣленно*, будемъ кратныя такія, что первая изъ нихъ больше второй, а третья не больше четвертой; тогда говорится, что первая ко второй имѣешь большее отношеніе, нежели третья къ

большому значенію, но есть оными выражаются только условія, по коимъ величины принадлежать къ тому или другому изъ трехъ опредѣленій.

четвертой, или что отношеніе первыхъ двухъ больше отношенія послѣднихъ двухъ. Говорится и обратно, но если, что пренія къ четвертой имѣетъ меньшее отношеніе, нежели первая ко второй; или, что отношеніе преній къ четвертой, меньше отношенія первой ко второй. — Когда, напр. величины A, B, C, D таковы, что взявъ aA, bB, aC, bD , будетъ aA больше нежели bB , но aC не больше нежели bD : то говорится, что A къ B имѣетъ большее отношеніе нежели C къ D , или C къ D меньшее нежели A къ B .

Примѣч. Для краткости сказанное отношеніе пишется: $A:B > C:D$, или $C:D < A:B$.

Слѣдствіе 1. Изъ опредѣленій 3 и 4 явствуетъ, что *отношеніе* двухъ величинъ есть нѣкая зависимость ихъ между собою, опредѣляемая при сравненіи оныхъ съ другими двумя величинами, или съ другимъ отношеніемъ.

Слѣд. 2. Ошуда же явствуетъ, что отношеніе имѣютъ только такіа неравныя величины, изъ коихъ меньшая взятая крат-

по можешъ сдѣлаться больше большей (*).

Сл. 3. Явствуетъ еще, что члены отношенія должны быть одного рода.

Сл. 4. Поелику же и всѣ четыре величины, находящіяся въ равныхъ или неравныхъ* отношеніяхъ, могутъ быть одного *опр. 3 и 4. рода; но еще явствуетъ, что одинъ изъ нихъ можешъ занимать два мѣста.

5. Равенство двухъ отношеній называется пропорціею*, а неравенство про- *опр. 3. порціею неравенства*. Величины въ пер- *опр. 4. вомъ случаѣ называются пропорціональными, и во второмъ пропорціональными въ неравенствѣ.

6. Первый членъ всякаго отношенія называется предъидущимъ, а второй послѣдующимъ.

7. Величины называются непрерывно-пропорціональными, ежели первая ко второй

(*) И потому нуль, и такъ называемыя безконечно великія или безконечно малыя количества членами отношенія быть не могутъ. Сіе обстоятельство весьма важно, и заслуживаетъ величайшаго вниманія Геометровъ.

рой имѣеть тоже отношеніе, что вторая къ третьей, а вторая къ третьей тоже, что третья къ четвертой, и такъ далѣе.—Посему, когда $A:B::B:C::C:D::D:E$; то величины A, B, C, D, E называются непрерывно пропорціональными.

8. Когда три величины непрерывно пропорціональны*, то говорится, что первая къ третьей имѣеть удвоенное отношеніе первой ко второй: и обратно, первая ко второй имѣеть половинное первая къ третьей. — Такъ, если $A:B::B:C$, то удвоенное отношеніе A къ B значитъ отношеніе A къ C , и обратно, половинное отношеніе A къ C значитъ отношеніе A къ B .

9. Когда четыре величины непрерывно пропорціональны*, то говорится, что первая къ четвертой имѣеть утроенное отношеніе первой ко второй, и обратно. И такъ далѣе, когда будетъ величинъ пять, и болѣе. Такъ, если $A:B::B:C::C:D$, то утроенное отношеніе A къ B значитъ отношеніе A къ D .

Примѣч. Удвоенное отношеніе A къ B для краткости означается чрезъ $\frac{A}{\frac{1}{2}B}$, у-

проектное отношеніе А къ В чрезъ $\frac{3}{A:B}$, ■
такъ далѣе.

10. Сходственными величинами или членами называются предъидущій съ предъидущимъ, а послѣдующій съ послѣдующимъ*. — Такъ въ $A:B::C:D$, или въ *опр. 6.
 $A:B > C:D$, А съ С, а В съ D суть сходственные.

11. Если изъ четырехъ величинъ, первая ко второй имѣетъ такое отношеніе, что четвертая къ третьей, то говорится, что первая двѣ суть въ обратномъ отношеніи послѣднихъ двухъ. — Напр. Когда изъ А, В, С, D, будетъ $A:B::D:C$, то говорится, что А къ В въ обратномъ отношеніи С къ D.

12. Примѣненіе отношеній есть взятіе предъидущей* величины къ предъидущей, *впр. 6.
и послѣдующей къ послѣдующей. — Такъ $A:B::C:D$, будетъ примѣненіемъ, $A:C::B:D$.

13. Преложеніе отношенія есть взятіе послѣдующей, какъ предъидущей, къ предъидущей, какъ послѣдующей. — Такъ, изъ $A:B$ будетъ преложеніемъ, $B:A$.

14. Совокупленіе отношенія есть взятіе суммы обѣихъ величинъ къ послѣдующей. —

Такъ изъ $A:B$ совокупленіемъ будетъ $(A+B):B$.

15. Ошдѣленіе отношенія есть взятіе разности или избытка предъидущей величины предъ послѣдующею къ послѣдующей. — Такъ, изъ $A:B$ ошдѣленіемъ будетъ $(A-B):B$.

16. Обращеніе отношенія есть взятіе предъидущей величины къ разности или избытку предъидущей предъ послѣдующею. — Такъ, изъ $A:B$ обращеніемъ будетъ $A:(A-B)$.

17. Равномѣстіе отношеній называется, когда въ двухъ пропорціональныхъ рядахъ* равномногихъ (*) величинъ, взяты будутъ отношенія членовъ, одинакія мѣста занимающихъ. — Такъ, ежели въ рядахъ

$A, B, C, D,$

$E, F, G, H,$

коихъ члены по порядку имѣютъ отношенія: $A:B::E:F$, $B:C::F:G$, $C:D::G:H$, или $A:B::G:H$, $B:C::F:G$, $C:D::E:F$; то отношеніе $A:C$ съ отношеніемъ $E:G$

(*) То есть, равныхъ числомъ.

или $G:E$, также отношеніе $A:D$ съ $E:H$ или $H:E$, и пр. называются равномѣстными.

18. Равномѣстіе прямое отношеній, или простое, равномѣстіе, называется, когда въ двухъ пропорціональныхъ рядахъ-равно-многихъ величинъ взяты будущъ въ одинакомъ порядкѣ отношенія членовъ, одинакія мѣста занимающихъ. — Въ предъидущемъ примѣрѣ: $A:D$ съ $C:H$, или $B:D$ съ $F:H$ суть отношенія прямо равномѣстныя.

19. А естли будущъ не въ одинакомъ порядкѣ сказанныя отношенія*, то назы- * смр. 18.
вается равномѣстіемъ обратнымъ. — Въ томъ же примѣрѣ: $A:D$ съ $H:E$, и пр. суть отношенія обратно равномѣстныя.

20. Если будетъ одинъ рядъ непрерывно-пропорціональныхъ величинъ, и другой рядъ отношеній пожеслѣдственныхъ съ отношеніями величинъ перваго ряда: то говорится, что первая величина къ послѣдней перваго ряда имѣетъ отношеніе сложенное изъ отношеній втораго ряда. Напр. пусть будущъ величины A, B, C, D и отношенія $M:N, P:Q, R:S$, такія, что

$$A:B::M:N,$$

$$B:C::P:Q,$$

$$C:D::R:S;$$

то говорится, что $A:D$ имѣетъ отноше-
ніе сложенное изъ отношений $M:N$, $P:Q$,
и $R:S$.

Примѣчаніе. Для краткости предъидущее
отношеніе пишется:

$$A:D::(M:N)+(P:Q)+(R:S).$$

АКСИОМЫ.

1. Равнократныя или равночасныя по-
тоже или равныхъ, суть и взаимно равны.

2. Равнократныя или равночасныя не-
равныхъ, суть и взаимно неравны.

3. Когда одна величина къ другой сво-
его рода, имѣетъ отношеніе; то и всякая
данная величина къ пѣкой величинѣ сво-
егоже рода имѣетъ отношеніе. Иначе:
ежели будущъ при величины, изъ коихъ
двѣ первыя имѣютъ отношеніе, то всег-
да естъ четвертая величина къ коей пре-
тѣя имѣетъ тоже, большее или меньшее
отношеніе.

ПРЕДЛОЖЕНІЯ.

I.

Ежели будетъ сколько ни есть величинъ, кои другихъ равномногихъ величинъ равнокрашны, каждая каждой; то сколько одна есть крашная одной, столько и всѣ будутъ крашны всѣхъ.

Пусть будетъ сколько ни есть величинъ А, В, С, кои равномногихъ другихъ D, E, F равнокрашны*, каждая каждой, то ^{*опр. 2.} есть, пусть будетъ

$$A = mD,$$

$$B = mE,$$

$$C = mF.$$

Говорю, что $(A + B + C) = m(D + E + F)$.

И дѣйствительно,

$$A = D + D + D + \dots m \text{ разъ},$$

$$B = E + E + E + \dots m \text{ разъ},$$

$$C = F + F + F + \dots m \text{ разъ};$$

по сему $(A + B + C) = (D + E + F) + \dots m \text{ разъ},$

то есть, $A + B + C = m(D + E + F)$

II.

Ежели первая величина второй, и третья четвертой, равнокрашны, также пятая

второй и шестая четвертой равнокрапны: то и совокупно, первая съ пятою второй и третьей съ шестю четвертой, будутъ равнокрапныя.

Пусть будутъ шесть величинъ

$$A, B, C, D,$$

$$E, F,$$

$$\text{такія, что } A = mB, C = mD,$$

$$E = nB, F = nD.$$

$$\text{Говорю, что } A + E = (m + n)B, C + F = (m + n)D,$$

то есть, что $(A + E)$, $(C + F)$ суть равно-

опр. 2. крапныя величинъ B , D .

И дѣйствительно,

$$A = B + B + B + \dots m \text{ разъ,}$$

$$E = B + B + B + \dots n \text{ разъ;}$$

$$\text{поему } A + E = B + B + B + B + \dots (m + n) \text{ разъ,}$$

$$\text{то есть, } A + E = (m + n)B.$$

$$\text{Такъ же докажется, что } C + F = (m + n)D.$$

III.

Ежели первая величина второй, и третья четвертой будутъ равнокрапны, и взяты будутъ первой и третьей равнокрапныя: то и сіи взятыя будутъ равнокрапны второй и четвертой, каждая каждой.

Пусть будутъ величины A, B, C, D такія,

что $A = mB$, $C = mD$, и пусть взяты будутъ nA , nC . Говорю, что и nA , nC будутъ равнократны величинъ B , D , каждая каждой.

Поселику $A = B + B + B + \dots m$ разъ,

$C = D + D + D + \dots m$ разъ;

то $nA = nB + nB + nB + \dots mn$ разъ* $= mnB$, *акс. 1.

$nC = nD + nD + nD + \dots mn$ разъ $= mnD$.

Итакъ, $nA = mnB$,

$nC = mnD$.

IV.

Ежели первая величина ко второй имѣеть такое отношеніе, что и третья къ четвертой; то и равнократныя первой величины и третьей къ равнократнымъ второй величины и четвертой, по какому ни есть кратствіюванію, будутъ имѣть такое отношеніе, взятыя попеременно.

Пусть будетъ $A:B::C:D$ *. Говорю, что *опр. 3.
 $mA:nB::mC:nD$.

Возьми $E = p.mA$, $F = p.mC$,

$G = q.nB$, $H = q.nD$,

то есть, еще равнократно первую и третью и такъ же вторую и четвертую: посему E , F равнократны величинъ A , C ,

а G , H равнокрашны величины B , D , каждая

3. каждой. Ишакъ, поелику $A:B::C:D$; то,

опр. 3. въ слѣдствіе опредѣленія пропорціи, естѣли $E > G$, то $F > H$, а естѣли $E = G$, то $F = H$, а естѣли $E < G$, то $F < H$. Но какъ величины mA , nB , mC , nD , суть крашныя E , G , F , H , ибо сія означаютъ $p mA$, $q n B$, $p m C$, $q n D$: слѣдственно, шакже по опредѣленію пропорціи, будетъ $m A : n B :: m C : n D$.

Слѣдствіе 1. Такимъ же образомъ докажемся, что ежели первая величина ко второй имѣетъ такое отношеніе, какое шретья къ четвертой; то и равнокрашныя первой и шретьей будутъ ко второй и четвертой имѣть такое отношеніе, и шакъ же первая и шретья будутъ къ равнокрашнымъ второй и четвертой имѣть такое отношеніе.

Слѣд. 2. Поелику доказано, что естѣли $E > G$, то $F > H$, а естѣли $E = G$, то $F = H$, а естѣли $E < G$, то $F < H$; слѣдовательно шакже доказано, что естѣли $G > E$, то $H > F$, а естѣли $G = E$, то $H = F$, а естѣли $G < E$, то $H < F$: а посему будетъ $n B : m A :: n D : m C$. Отсюда явствуетъ, что

если величины пропорціональны, то и предложением* пропорціональны.

* опр. 1

V.

Если цѣлая величина цѣлой, и опнятая опъ оной опняшой опъ другой сушь равнокрашныя; то и осальная осальной и цѣлая цѣлой будушь равнокрашныя.

Пусть будушь $A = C + D$, а $B = E + F$ такія, что $A = nB$, а $C = nE$. Говорю, что $D = nF$.

Поелику $A = nB$, а $B = E + F$; то
 $A = (E + F) + (E + F) + (E + F) + \dots n$ разъ
 $= E + E + E + \dots n$ разъ $+ F + F + F + \dots n$ разъ,
 $= nE + nF$. Но $A = C + D$: посему
 $C + D = nE + nF$. Или, по причинѣ что $C = nE$, будетъ $nE + D = nE + nF$. Слѣдственно $D = nF$.

VI.

Если двѣ величины равнокрашны двухъ величинъ, и опнятыя нѣкія(*) такожь равнокрашны сихъ самихъ величинъ; то осальныя(**) будушь или равныя имъ же, или равнокрашныя ихъ.

(*) То есть, нѣкоторыя ихъ часши.

(**) Т. е. осашки.

Пусть будетъ $A = C + D = mG$,

$$B = E + F = nH,$$

$$C = nG,$$

$$E = nH.$$

Говорю, что величины D , F или равны величинамъ G , H , каждая каждой, или равнокрапны оныхъ.

Пусть, во первыхъ, $D = G$: говорю, что $F = H$.

Послику A или $(C + D) = mG$,

$$\text{и } C = nG;$$

то $A - C$ или $D = (m - n)G$. Но по положенію $D = G$: посему $m - n = 1$.

Еще же, послику B или $E + F = nH$,

$$\text{и } E = nH,$$

то $B - E$ или $F = (m - n)H$. Но, по доказанному, $m - n = 1$: слѣдственно $F = H$.

Итакъ, когда $D = G$, то $F = H$.

Если же $m - n > 1$, то, послику найдено

$$D = (m - n)G,$$

$$F = (m - n)H;$$

посему явствуетъ, что D , F суть равно-

* опр. 2. крапны* величинъ G , H .

VII.

Равныя величины къ тойже имѣютъ

тоже отношеніе. И таже величина къ равнымъ имѣетъ тоже отношеніе.

Пусть будутъ величины A, B, C такія, что $A = B$. Говорю, что

$$A:C :: B:C,$$

$$C:A :: C:B.$$

Возьми mA, mB, mC : посему $mA = mB$.

Итакъ, если $mA > nC$, то $mB > nC$,

а если $mA = nC$, то $mB = nC$,

а если $mA < nC$, то $mB < nC$.

Посему величины A, C, B, C , какія mA, nC, mB, nC , имѣютъ свойство означенное въ опредѣленіи пропорціи*; а посему * оцр. 3.

$$A:C :: B:C.$$

Говорю еще, что $C:A :: C:B$ (*). Поселику доказано, что $mA = mB$:

посему если $nC > mA$, то $nC > mB$,

а если $nC = mA$, то $nC = mB$,

а если $nC < mA$, то $nC < mB$.

Итакъ величины, C, A, C, B какія

(*) Сія вторая часть слѣдуетъ также непосредственно изъ первой и слѣдствія къ предположенію 4.

nC, mA, nC, mB имѣютъ свойство означенное въ опредѣленіи пропорціи; а посему

$$C:A::C:B$$

VIII.

Изъ неравныхъ величинъ большая къ той же имѣетъ большее отношеніе, нежели меньшая. И также величина къ меньшей имѣетъ большее отношеніе, нежели къ большей.

Пусть будутъ величины A, B, C такія, что $A > B$. Говорю, что

* опр. 4.

$$A:C > B:C^*,$$

$$C:B > C:A.$$

Поскольку $A > B$, то пусть $A = B + D$. И такъ меньшая изъ величинъ B, D взятая кратно будетъ наконецъ больше величины C .

Пусть, во первыхъ, будетъ D меньшая. Возьми кратную ея бо́льшую величины C (*), которая пусть будетъ E равная $aD > C$. И возьми $F = aB$, и величины C двукратную, прикратную, и проч. пока получится первая бо́льшая величины F .

(*) Здѣсь должно братьъ кратно величину D , хотя бы она сама по себѣ была больше величины C .

Пусть будетъ $4C$ таковая крапная: по-
сему $F < 4C$, и $F < 3C$ (*). И поелику
 $E = aD$, $F = aB$, то $E + F = a(D + B)^*$,
или $E + F = aA$. Но $E > C$, а $F < 3C$; по-
сему $E + F$ или $aA > 4C$. Итакъ, поелику
величинъ A , C , B , C крапныя aA , $4C$, aB , $4C$,
суть таковы, что $aA > 4C$, и aB по
есть $F > 4C$: слѣдственно, по свойству
неравной пропорціональности*,

* опр. 4.

$$A:C > B:C.$$

Говорю также, что $C:B > C:A$. Ибо
въ предъидущемъ доказано, что величинъ
 C , B , C , A крапныя $4C$, aB , $4C$, aA суть
таковы, что $4C$ или $E > aB$, и $4C > aA$:
слѣдственно, по свойству неравной про-
порціональности,

$$C:B > C:A.$$

Но пусть изъ величинъ B , D будетъ
меньшая B . Возьми крапную ея большую
величины C , и пусть будетъ Еравная $aB > C$.
И возьми $F = aD$, и опять величины
 C крапную, которая первая больше F .

(*) Знакъ \triangleright показываетъ не больше, а знакъ \triangleleft
не меньше.

И пусть таковая будетъ $4C$. Посему $F < 4C$, и $F < 3C$. Припомъ же оныяъ
 1. $E + F = a(D + B)^ = aA$. Но какъ $B < D$,
 акс. 2. то есть $aB < aD^$, а aD или $F < 4C$; по-
 сему $aB > 4C$. Имакъ, величинъ A, C, B, C ,
 крайныя $aA, 4C, aB, 4C$ суть таковы,
 опр. 4. что $aA > 4C$, а $aB > 4C$: посему $A:C > B:C^$.

Далѣе, что $C:B > C:A$, докажемся, какъ
 и въ первой части.

IX.

Величины, къ тойже величинѣ имѣю-
 щія тоже отношеніе, взаимно равны. И
 къ копорымъ таже величина имѣеть то-
 же отношеніе, и шѣ взаимно равны.

Пусть величины A, B къ величинѣ C
 имѣють тоже отношеніе, то есть, пусть
 опр. 3. будетъ $A:C :: B:C^$. Говорю, что $A = B$.

Еслили же нѣтъ, то $A > B$, или $A < B$.
 Посему было бы $A:C > B:C$,

8. или $A:C < B:C^$;

что противно положенію: слѣдственно
 $A = B$.

Пусть еще одна и таже величина C къ
 величинамъ A, B имѣеть тоже отноше-

ВЕЛИЧИИЪ ПРОПОРЦІОНАЛЬНЫХЪ. 61

ніе, то есть, пусть $C:A::C:B$. Говорю, что $A=B$ (*).

Еслили же нѣтъ, то $A>B$, или $A<B$. Посему было бы $C:A<C:B$,

или $C:A>C:B$; *3.

что противно положенію: слѣдственно $A=B$.

X.

Изъ величинъ, къ тойже величинѣ имѣющихъ отношеніе, которая имѣетъ большее отношеніе, та есть большая. И къ которой величинѣ также имѣетъ большее отношеніе, та есть меньшая.

Пусть изъ величинъ A , B , величина A къ величинѣ C имѣетъ большее отношеніе, нежели B къ C , то есть, пусть $A:C>B:C$. Говорю, что $A>B$.

*отр. 4.

Еслили же нѣтъ, то $A=B$, или $A<B$. Посему было бы $A:C::B:C$,

*7.

или $A:C<B:C$; *8.

что противно положенію: слѣдственно $A>B$.

Пусть еще одна и также величина C къ величинѣ B имѣетъ большее отношеніе,

(*) Сія вторая часть слѣдуетъ также изъ первой и изъ слѣдствія къ предложенію 4.

* опр. 4. нежели къ A , то есть пусть $C:B > C:A^*$.

Говорю, что $B < A$.

Еслили же нѣтъ, то $B = A$, или $B > A$.

* 7. Посему было бы $C:B :: C:A^*$,

* 8. или $C:B < C:A^*$;

что противно положенію: слѣдственно
 $B < A$.

XI.

Отношенія, кои суть тѣже съ тѣмъ-же отношеніемъ, суть и взаимно тѣже!

Пусть $A:B :: C:D$, а $C:D :: E:F$, то есть, пусть отношенія $A:B$, и $E:F$ будутъ рав-

* опр. 3. ны или пожесивенны* съ однимъ и тѣмъ-же отношеніемъ $C:D$. Говорю, что оныя отношенія будутъ взаимно пожесивенны или равныя, то есть будетъ $A:B :: E:F$.

* опр. 6. Возьми предъидущихъ* членовъ равнокрапныхъ mA , mC , mE , и послѣдующихъ другія равнокрапныя nB , nD , nF .

Посеку $A:B :: C:D$, посему, изъ равнокрапныхъ mA , nB , mC , nD ,

еслили $mA > nB$, то $mC > nD$,

а еслили $mA = nB$, то $mC = nD$,

* опр. 3. а еслили $mA < nB$, то $mC < nD^*$.

Еще же, поелику $C:D :: E:F$, посему также

есѣли $mC > nD$, то $mE > nF$,

а есѣли $mC = nD$, то $mE = nF$,

а есѣли $mC < nD$, то $mE < nF$ *. *опр. 3.

Теперь, сравнивъ сіи крашныя съ предъ-
идушими крашными, будемъ:

есѣли $mA > nB$, то $mC > nD$, то $mE > nF$,

или короче: есѣли $mA > nB$, то $mE > nF$,

а есѣли $mA = nB$, то $mE = nF$,

а есѣли $mA < nB$, то $mE < nF$.

Слѣдственно, по опредѣленію пропорціи*, *опр. 3.

$$A:B::E:F.$$

XII.

Есѣли будемъ сколько ниесѣ вели-
чинъ пропорціональных; то какъ одна
предъидущая къ одной послѣдующей, такъ
всѣ предъидущія ко всѣмъ послѣдующимъ.

Пусть будемъ сколько ниесѣ величинъ
A, B, C, D, E, F пропорціональных*, то *опр. 5.
есть $A:B::C:D::E:F$. Говорю, что

$$A:B::(A+C+E):(B+D+F).$$

Возьми равнокрашныя mA , mC , mE ,
и другія равнокрашныя nB , nD , nE .

Поелику $A:B::C:D::E:F$, и взяны краш-
ныя mA , nB , mC , nD , mE , nE : посему,
есѣли $mA > nB$, то $mC > nD$, и $mE > nE$, а

если равна, то равны, а если меньше, то меньше*. Слѣдственно, если $mA > nB$, то $mA + mC + mE > nB + nD + nF$, а если равна, то равны, а если меньше, то меньше. Припомъ же $mA + mC + mE = m(A + C + E)$, а $nB + nD + nF = n(B + D + F)$ *. Посему величинъ $A, B, (A + C + E), (B + D + F)$ крайныя $mA, nB, m(A + C + E), n(B + D + F)$ имѣють свойство означенное въ опредѣленіи пропорціи*, и слѣдовательно

$$A:B :: (A+C+E):(B+D+F).$$

XIII.

Если первая величина ко второй имѣетъ такое отношеніе, что и третья къ четвертой; третья же къ четвертой имѣетъ большее отношеніе, нежели пятая къ шестой: то и первая ко второй будетъ имѣть большее отношеніе, нежели пятая къ шестой.

Пусть будутъ шесть величинъ A, B, C, D, E, F такія, что $A:B :: C:D$, а $C:D > E:F$. Говорю, что $A:B > E:F$.

Поскольку $C:D > E:F$; то суть какія нѣсть крайныя величинъ C, E , и еще крайныя величинъ D, F , такія, что крайняя первой больше крайняя второй, а край-

ная прешней не больше крапня чешвершой*. Пусть будущъ таковыя крапня *опр. 4.
 aC , bD , aE , bF , шо есть, что $aC > bD$,
 но $aE > bF$. И возьми еще величинъ A , B
 крапня aA , bB . И поелику $A:B::C:D$, и
 взяши крапня aA , bB , aC , bD ; посему, есѣ-
 ли $aA > bB$, шо $aC > bD$ *, или есѣли $aC > bD$, *опр. 3.
 шо $aA > bB$, а есѣли равна, шо равна, а
 есѣли меньше, шо меньше. Но уже ска-
 зано, что $aC > bD$; посему $aA > bB$. И какъ
 $aE > bF$: слѣдсвенно величины A , B , E , F ,
 коихъ крапня aA , bB , aE , bF имѣющъ
 свойство предполагаемое въ опредѣленіи
 неравной пропорціи*, дающъ

*опр. 4.

$$A:B > E:F.$$

XIV.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ
 такое отношеніе, что и прешня къ чеш-
 вершой, и первая больше прешней, шо
 и вторая больше чешвершой, а ежели равна,
 шо равна, а ежели меньше, шо меньше.

Пусть будутъ $A:B::C:D$, и пусть, во-
 первыхъ, будутъ $A > C$. Говорю, что и
 $B > D$.

- *8. Поскольку $A > C$, то сравнивая сіи величины съ B , будемъ $A:B > C:B^*$. Но по положенію, $A:B :: C:D$; посему и $C:D > C:B^*$.
- *10. А къ какой величинѣ одна и таже имѣетъ большее отношеніе, та есть меньшая*: посему $D < B$, или $B > D$. Слѣдственно, еслии $A > C$, то $B > D$.

Подобно докажется, что еслии $A = C$, то $B = D$, а еслии $A < C$, то $B < D$.

Г XV.

Числныя величины къ своимъ равнотранснымъ имѣютъ тоже отношеніе, взятныя попеременно.

Пусть будемъ $A = mB$, $C = nD$, то есть
опр. 2. B, D равночислныя величины A, C . Говорю, что $B:D :: A:C$.

Поскольку $A = mB$, а $C = nD$; то

$$A = B + B + B + \dots m \text{ разъ,}$$

$$C = D + D + D + \dots n \text{ разъ.}$$

7. Но $B:D :: B:D :: B:D^ :: \dots m$ отношеній: посему $B:D :: (B + B + B + \dots m \text{ разъ}):$

12. $(D + D + D + \dots n \text{ разъ})^$;

или $B:D :: A:C$.

XVI.

Ежели чешыре величины пропорціональны; то и премѣненіемъ будущъ пропорціональны.

Пусть будетъ $A:B::C:D$. Говорю, что будетъ, премѣненіемъ*, $A:C::B:D$. * опр. 12.

Возьми величинъ A, B равнокрашныя mA, mB , и величинъ C, D равнокрашныя nC, nD .

Итакъ, по доказанному предъ симъ будетъ $A:B::mA:mB$, и $C:D::nC:nD$ *. Но *15. $A:B::C:D$; посему $mA:mB::nC:nD$ *. А изъ *11. пропорціональныхъ величинъ, есѣли первая больше шрешей, то и вторая больше чешвершой, а есѣли равна, то равна, а есѣли меньше, то меньше*: посему есѣ-*14. ли $mA > nC$, то $mB > nD$, а есѣли равна, то равна, а есѣли меньше, то меньше. Слѣдовашельно величинъ

A, C, B, D

крашныя mA, nC, mB, nD

имѣющъ зависимость означенную въ опре-
 * опр. 3. дѣленіи пропорціи*; и потому будешь

$$A:C::B:D.$$

XVII.

Ежели совокупленныя величины пропор-
 ціональны; то и отдѣленныя будутъ про-
 порціональны.

Пусть будешь $(A + B):B::(C + D):D$.
 Говорю, что $A:B::C:D$.

Возьми величины A, B, C, D равнокраш-
 ныя mA, mB, mC, mD , и еще величины
 B, D равнокрашныя nB, nD .

Итакъ $mA + mB = m(A + B), mC + mD =$
 *1. $m(C + D)$ *; а $mB + nB = (m + n)B, mD + nD =$
 *2. $(m + n)D$ *. И поелику $(A + B):B::(C + D):D$,
 и взявши крашныя $m(A + B), (m + n)B,$
 $m(C + D), (m + n)D$; посему есѣли
 $m(A + B) > (m + n)B$, то $m(C + D) > (m + n)D$,
 а есѣли равны, то равны, а есѣли мень-
 * опр. 3. ше, то меньше*. Пусть будешь, во первыхъ,
 $m(A + B) > (m + n)B$, то есѣ $mA + mB >$
 $mB + nB$: посему $mA > nB$. По есѣли

$m(A+B) > (m+n)B$, по $m(C+D) > (m+n)D$,
по есть $mC + mD > nD + nD$: посему
 $mC > nD$. Ишакъ доказано, что есшли
 $mA > nB$, по $mC > nD$.

Подобно докажеться, что есшли $mA = nB$,
по $mC = nD$, а есшли $mA < nB$, по
 $mC < nD$. Слѣдственно будетъ

$$A:B::C:D^{(*)}.$$

* опр. 3.

XVIII.

Ежели величины отдѣленныя пропорцио-
нальны; по и совокупленныя будутъ про-
порціональны.

Пусть будетъ $(A-B):B::(C-D):D$. Го-
ворю, что $A:B::C:D$.

Ибо, есшли не такъ, по пусть $A:B::C:X$,
гдѣ X или больше, или меньше D . Пусть,
вопервыхъ, будетъ меньше. Ишакъ, по
доказанному предъ симъ*, будетъ $(A-B):B::$ * 17.
 $(C-X):X$. А по положенію, $(A-B):B::$

(*) Есшли предполагаемая пропорція будетъ
 $A:B::C:D$; по посему же предложенію будетъ
 $(A-B):B::(C-D):D$. Причемъ явно, что величина
 A должна быть больше величины B .

11. $(C - D) : D$: посему $(C - X) : X :: (C - D) : D^$, или, предложениемъ, $X : (C - X) :: D : (C - D)^*$. Но $X < D$, по положению; посему $(C - X) < (C - D)$: а посему еще $X > D$, что не-лѣпо. Слѣдственно X не меньше D . Такъ же докажешь, что X не больше: а по-тому $X = D$, и будешь $A : B :: C : D$ (*).

XIX.

Ежели будешь, какъ цѣлая величина къ цѣлой, такъ опиящая къ опияшой; то и осмальная будешь къ осмальной, какъ цѣлая къ цѣлой.

Пусть будешь $(A + B) : (C + D) :: B : D$. Говорю, что и $A : C :: (A + B) : (C + D)$.

Послику $(A + B) : (C + D) :: B : D$; то
 16. премѣненіемъ, $(A + B) : B :: (C + D) : D^$,
 17. посему оидѣленіемъ, $A : B :: C : D^$; а пре-
 18. мѣненіемъ, $A : C :: B : D^$. По по поло-
 женію, $(A + B) : (C + D) :: B : D$; чего ради
 11. $A : C :: (A + B) : (C + D)^$

(*) Если бы предполагалось было $A : B :: C : D$; то посему же предложению, будешь $(A + B) : B :: (C + D) : D$.

Слѣдствіе. Поелику изъ $(A+B):(C+D)::B:D$ доказано, что $(A+B):(C+D)::A:C$; или, взявъ премѣненіемъ обѣ пропорціи*, *16. изъ $(A+B):B::(C+D):D$ доказано, что $(A+B):A::(C+D):C$, то есть пропорціональность чрезъ обращеніе*: по- *откр. 16. сему явствуешь, что величины пропорціональны, и обращеніемъ суть пропорціональны.

XX.

Ежели будутъ три величины, и другія имъ равномногія, взятыя по двѣ въ шомъ же отношеніи; и ежели, равномѣстно, первая больше третьей, то и четвертая будетъ больше шестой; и ежели равна, то равна, а ежели меньше, то меньше.

Пусть будутъ три величины A, B, C , и другія имъ равномногія D, E, F , такія, что $A:B::D:E$, и $B:C::E:F$. И пусть будетъ $A > C$, то говорю, что равномѣстно* $D > F$; и еслили $A = C$, то *откр. 17и18. $D = F$, а еслили $A < C$, то $D < F$.

Поелику $A > C$, то еравнивая сіи величины съ B , будетъ $A:B > C:B$ *. Но $A:B::D:E$; *8.

а (пропорціи $B : C :: E : F$ преложеніемъ)
^{*сл. 4.} $C : B :: F : E^*$; по сему $D : E > F : F^*$; а по-
^{*11. и 13.} сему $D > F^*$. И такъ доказано, что естѣ-
 ли $A > C$, то $D > F$. Подобно докажется,
 что естѣли $A = C$, то $D = F$, а естѣли
 $A < C$, то $D < F$.

XXI.

Ежели будутъ три величины, и другія
 имъ равномногія, взятыя по двѣ въ шомъ
 же отношеніи, пропорціи же ихъ будутъ
 обратная; и ежели, равномѣрно, первая
 больше шрешней, то и четвертая будетъ
 больше шестой, и ежели равна, то равна,
 а ежели меньше, то меньше.

Пусть будутъ три величины A, B, C ,
 и другія имъ равномногія D, E, F , въ
^{*опр. 19.} обратномъ порядкѣ пропорціональныя*, то
 естѣ такія, что $A : B :: E : F$ и $B : C :: D : E$.
 И пусть будетъ $A > C$, то говорю, что
 равномѣрно $D > F$; и естѣли $A = C$, то
 $D = F$, а естѣли $A < C$, то $D < F$.

Поелику $A > C$, то, сравнивая сіи ве-
^{*3.} личины съ B , будетъ $A : B > C : B^*$ Но
 $A : B :: E : F$, а (пропорціи $B : C :: D : E$

предложеніемъ) $C : B :: E : D^*$; посему * сл. 4.
 $E : F > E : D^*$; а посему $F < D$, или $D > F^*$. * 11 и 13.
 Инакъ доказано, что еслили $A > C$, то
 $D > F$. Подобно докажется, что еслили
 $A = C$, то $D = F$, а еслили $A < C$, то $D < F$.

XXII.

Ежели будетъ сколько нисель величинъ,
 и другихъ имъ равномногихъ, взятыхъ по
 двѣ въ томъже отношеніи; то и равно-
 мѣстно будутъ въ томъже отношеніи.

Пусть будетъ сколько нисель величинъ
 A, B, C , и другихъ имъ равномногихъ D, E, F ,
 кои по двѣ по порядку суть пропорціо-
 нальны*, то есть

* qur. 17.

$$A : B :: D : E,$$

$$B : C :: E : F,$$

Говорю, что $A : C :: D : F$.

Возьми величинъ A, D равнокрашныя
 mA, mD , и также величинъ B, E равно-
 крашныя nB, nE , и еще величинъ C, F
 равнокрашныя pC, pF .

Поелику $A : B :: D : E$, и $B : C :: E : F$, то будетъ
 $mA : nB :: mD : nE$. Пошому же $nB : pC :: nE : pF$.
 Инакъ, поелику суть три величины mA ,

nB , pC , и другія имъ равномногія величины mD , nE , pF , въ прямомъ порядкѣ

опр. 18. пропорціональныя: посему, изъ взяшихъ равноѣсно mA , pC , и mD , pF , есѣли $mA > pC$, то $mD > pF$, а есѣли равна,

20. то равна, а есѣли меньше, то меньше.

Но mA , pC , mD , pF сущь крапнія величины A , C , D , F , взяныя по свойству

опр. 3. пропорціи: слѣдсѣнно

$$A : C :: D : F.$$

XXIII.

Ежели будущъ три величины, и другія имъ равномногія, взяныя по двѣ въ шомъ же отношеніи, пропорція же ихъ будешъ обратная; то и равноѣсно будущъ въ шомъ же отношеніи.

Пусть будущъ три величины A , B , C , и другія имъ равномногія D , E , F , кои
опр. 19. по двѣ въ обратномъ порядкѣ сущь пропорціональны, то есѣ

$$A : B :: E : F,$$

$$B : C :: D : E.$$

Говорю, что $A : C :: D : F$.

Возьми величинъ A, B, D равнокрашныя mA, mB, mD , и еще величинъ C, E, F равнокрашныя nC, nE, nF . Поелику частныя величивы къ своимъ равнокрашнымъ имѣють тоже отношеніе*; по $A:B::mA:mB$, и * 15. $E:F::nE:nF$. Но $A:B::E:F$: поему $mA:mB::nE:nF$ *. * 11. И поелику $B:C::D:E$, то $mB:nC::mD:nE$. И пакъ при величинъ mA, mB, nC , и другія имъ равномногія mD, nE, nF сущъ въ обратномъ порядкѣ пропорціональны* поему изъ * опр. 19. взятыхъ равнобѣсно, mA, nC , и mD, nF , естли $mA > nC$, то $mC > mF$, а естли равна, то равна, а естли меньше, то меньше*. Но mA, nC, mD, nF сущъ крашныя величинъ A, C, D, F , взятыя по свойству пропорціи*: слѣдовенно

$$A : C :: D : F.$$

* опр.

XXIV.

Ежели первая величина ко второй имѣеть тоже отношеніе, что третья къ четвертой, и также пятая ко второй имѣеть тоже отношеніе, что шестая къ четвертой: то совокупленно, первая съ пятою ко второй будетъ имѣть тоже отношеніе, что третья съ шестою къ четвертой.

Пусть будетъ иесть величины $A, E, C, D,$
 E, F такія что $A : B :: C : D,$ и $E : B :: F : D.$
 Говорю, что $(A + E) : B :: (C + F) : D.$

* опр. 13. Поелку $E : B :: F : D,$ то преложеніемъ*

* сл. 4. $B : E :: D : F^*.$ По полагаетея $A : B :: C : D;$
 посему изъ шрехъ величинъ $A, B, E,$ и
 другихъ имъ равномногихъ $C, D, F,$ кои
 взявши въ прямомъ порядкѣ пропорціо-

* опр. 18-нальны*, будетъ равнобѣсно

* 22.

$$A : E :: C : F^*.$$

А есшлы ондѣльно величины пропор-

ціональны, то и совокупно будущъ про-

* 18. порціональны*: посему

$$(A + E) : E :: (C + F) : F.$$

Но по положенію, $E : B :: F : D;$ посему
 равнобѣсно,

$$(A + E) : B :: (C + F) : D^*.$$

XXV.

Ежели чешыре величины пропорціональ-
 ны, то наибольшая съ наименьшею сушь
 больше двухъ прочихъ.

Пусть, будетъ $A : B :: C : D,$ и пусть
 будетъ наибольшая $A,$ а наименьшая $D.$
 Говорю, что $A + D > B + C.$

Поселику $A > C$, то $B > D^*$. Ишакъ ¹⁴.
 положи $A = C + F$, а $B = D + G$. И поселику
 $A : B :: C : D$, или, что все равно, $(C + F) :$
 $(D + G) :: C : D$; то будетъ $F : G :: A : B^*$. ¹⁹.
 Но $A > B$, посему $F > G$, а посему

$$C + D + F > C + D + G$$

но $C + F = A$, а $D + G = B$; слѣдственно

$$A + D > C + B$$

XXVI.

Ежели изъ чепырехъ величинъ пропорціо-
 нальныхъ будетъ первая больше второй,
 то и третья больше четвертой, а ес-
 ли равна, то равна, а ес-ли меньше,
 то меньше.

Пусть будетъ $A : B :: C : D$. Говорю, что
 ес-ли $A > B$, то $C > D$, а ес-ли $A = B$,
 то $C = D$, а ес-ли $A < B$, то $C < D$.

Возьми величинъ A, B, C, D равнокраш-
 ния nA, nB, nC, nD . И вопервыхъ, пусть
 будетъ $A > B$, посему $nA > nB^*$. Но ес- ^{зкс. 2.}
 ли $nA > nB$, то, по свойству пропорціи,
 $nC > nD$, ибо nA, nC , и nB, nD суть
 равнокрашныя величинъ A, C , и B, D :
 посему и $C > D$. Ишакъ доказано, что

если $A > B$, то $C > D$. Подобно докажемъ, что если $A = B$, то $C = D$, а если $A < B$, то $C < D$.

XXVII.

Если изъ четырехъ величинъ первая и третья равнократны или равночасны второй и четвертой, каждая каждой; то оныя величины будутъ пропорціональны.

Пусть будутъ величины A, B, C, D такія, что $A = nB, C = nD$. Говорю, что $A : B :: C : D$.

Возьми $E = pA, F = pC, G = qB, H = qD$; поему $E = p \cdot nB, F = p \cdot nD$, то есть E, F суть равнократныя величины B, D . Пусть будетъ, во первыхъ, $E > G$, то $pnB > qB$; поему $pn > q$: слѣдственно $pnD > qD$, то есть $F > H$. Итакъ, если $E > G$, то $F > H$. Подобно докажемъ, что если $E = G$, то $F = H$, а если $E < G$, то $F < H$. Итакъ, поелику четырехъ величинъ A, B, C, D взятыя кратныя pA, qB, pC, qD или E, G, F, H имѣютъ

* опр. 3. свойство означенное въ пропорціи*; то будетъ $A : B :: C : D$.

Но пусть будетъ $A = \frac{B}{n}$, $C = \frac{D}{n}$, то есть
 А, С равночасныя величинъ В, D, по-
 сему $B = nA$, $D = nC$. Слѣдственно, по доказа-
 занному будетъ $B:A::D:C$, а предложемъ

$$A : B :: C : D^*.$$

* сл. 2, 4.

XXVIII.

Ежели изъ чешырехъ величинъ пропор-
 ціональныхъ, первая есть крайняя или
 чашная второй, то и третья будетъ
 равнокрайняя или равночасная четвер-
 той.

Пусть будетъ $A:B::C:D$, и $A = nB$.
 Говорю, что $C = nD$.

Возьми $E = nD$. И поелику $A = nB$; то
 $A:B::E:D^*$. Но по положенію, $A:B::C:D$; *27.
 по сему $C:D::E:D^*$, а по сему $C = E$: *11.
 слѣдственно $C = nD$, ибо $E = nD$.

Но пусть будетъ $A = \frac{B}{n}$. Говорю, что
 $C = \frac{D}{n}$.

Посляку $A:B::C:D$, то предложениемъ,
 $B:A::D:C^*$. Но $B = nA$, ибо $A = \frac{B}{n}$: по сему *сл. 2, 4.
 $D = nC$, или $C = \frac{D}{n}$.

XXIX.

Отношенія, сложенные изъ шѣхъже отношеній, суть и взаимно шѣже.

Пусть будетъ $A : B :: C : D$,

$E : F :: G : H$,

$K : L :: M : N$.

Говорю, что отношеніе, сложенное изъ отношеній $A:B$, $E:F$, $K:L$ есть пожешвенно съ отношеніемъ, сложеннымъ изъ отношеній $C:D$, $G:H$, $M:N$, то есть, что $(A:B) + (E:F) + (K:L) :: (C:D) + (G:H) + (M:N)$.

Возьми какія нисеть величины O , S , и

* акс. 3. пусть будетъ*

$A : B :: O : P$, $C : D :: S : T$,

$E : F :: P : Q$, $G : H :: T : V$,

$K : L :: Q : R$, $M : N :: V : X$.

* 11. Посему* $O : P :: S : T$,

$P : Q :: T : V$,

$Q : R :: V : X$.

Итакъ, чепыре суть величины O , P , Q , R и другія имъ равномогія S , T , V , X , взятныя по двѣ въ шомъже отношеніи: посему

* 22. равнобѣнно, $O : R :: S : X$ *. Но, по опредѣ-

* опр. 20. ленію сложенного отношенія*,

$$O : R :: (A : B) + (E : F) + (K : L),$$

$$S : X :: (C : D) + (G : H) + (M : N);$$

слѣдственно $(A : B) + (E : F) + (K : L) ::$

$$(C : D) + (G : H) + (M : N)^* \quad * 11.$$

Слѣдствіе. Отсюда явствуешь, что отношенія удвоенныя сложесивенныхъ отношеній, или утроенныя, суть и взаимно сложесивенны.

XXX.

Ежели первая величина ко второй имѣеть большее отношеніе, нежели третья къ четвертой; то, предложениемъ, вторая къ первой будетъ имѣть меньшее отношеніе, нежели четвертая къ третьей: а ежели меньшее, то большее.

Пусть будетъ $A : B > C : D$. Говорю, что предложениемъ $B : A < D : C$.

Вообрази величину E , чтобы $E : B :: C : D^*$. * акс. 3.

Итакъ $A : B > E : B^*$; посему $A > E$: а по- 13.

сему $B : A < B : E^*$. Но изъ пропорціи * 8.

$E : B :: C : D$ будетъ, предложениемъ, $B : E :: D : C$:

слѣдовательно $B : A < D : C^*$. 13.

Подобно докажется, что если $A : B < C : D$, то будетъ $B : A > D : C$.

XXXI.

Ежели первая величина ко второй имѣеть большее отношеніе, нежели претѣя къ четвертой, и будетъ первая равна или меньше второй; то и претѣя меньше четвертой.

Пусть будетъ $A:B > C:D$. И пусть, во первыхъ, $A < B$. Говорю, что $C < D$.

* акс. 3. Вообрази величину E , чтобъ $A:B::C:E^*$.

* 10. Итакъ $C:E > C:D$, посему $D > E^*$. Но въ пропорціи $A:B::C:E$ по положенію, $A < B$;

* 26. посему $C < E^*$. Доказано же, что $E < D$: слѣдовательно $C < D$.

Еслилиже $A = B$, то въ пропорціи $A:B::C:E$

* 26. будетъ $C = E^*$. Но $E < D$; посему $C < D$.

XXXII.

Ежели первая величина ко второй имѣеть меньшее отношеніе, нежели претѣя къ четвертой, и будетъ первая равна или больше второй; то и претѣя больше четвертой.

Пусть будетъ $A:B < C:D$, и пусть, будетъ $A = B$, или $A > B$. Говорю $C > D$.

Поселику $A:B < C:D$, то предложениемъ,

* 30. $B:A > D:C^*$. Но по положенію $B = A$, или $B < A$: слѣдовательно, по доказанному, $D < C$, то есть $C > D$.

XXXIII.

Ежели первая величина ко второй имѣеть большее отношеніе, нежели третья къ четвертой; то и премѣненіемъ, первая къ третьей имѣеть большее, нежели вторая къ четвертой.

Пусть будетъ $A : B > C : D$. Говорю, что премѣненіемъ, $A : C > B : D$.

Вообрази величину E , чтобы $E : B :: C : D$. Итакъ $A : B > E : B$, посему $A > E^*$; а по-^{* 10.} сему $A : C > E : C^*$. Но, изъ пропорціи^{* 8.} $E : B :: C : D$ премѣненіемъ, $E : C :: B : D^*$; ^{* 16.} слѣдовательно $A : C > B : D^*$. ^{* 13.}

XXXIV.

Ежели первая величина ко второй имѣеть большее отношеніе, нежели третья къ четвертой; то и совокупленіемъ, первая со второю ко второй имѣеть большее отношеніе, нежели третья съ четвертою къ четвертой.

Пусть будетъ $A : B > C : D$. Говорю, что совокупленіемъ, $(A + B) : B > (C + D) : D$.

Вообрази величину E , чтобы $E : B :: C : D$. Итакъ $A : B > E : B$, посему $A > E^*$, и^{* 10.}

8. $A + B > E + V$: а посему $(A + B) : B > (E + V) : B^$.

Но, изъ пропорціи $E : B :: C : D$, совокупиле-
 18. ніемъ, $(E + V) : B :: (C + D) : D^$; слѣдова-
 13. тельно $(A + B) : B > (C + D) : D^$.

XXXV.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели третья къ четвертой; то и оиждвленіемъ, избытокъ первый предъ второю ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели избытокъ третьей предъ четвертою къ четвертой.

Пусть будетъ $A : B > C : D$. Говорю, что оиждвленіемъ, $A - B : B > C - D : D$.

зкс. 3. Вообрази величину E , чѣмъ $E : B :: C : D^$.

13. Итакъ $A : B > E : B^$, посему $A > E$, и

8. $A - B > E - B$: а посему $A - B : B > E - B : B^$.

Но, изъ пропорціи $E : B :: C : D$, оиждвленіемъ,
 17. $E - B : B :: C - D : D^$; слѣдовательно
 $A - B : B > C - D : D$.

XXXVI.

Ежели первая величина ко второй имѣетъ большее отношеніе, нежели третья къ четвертой; то обращеніемъ, первая къ избытку первая предъ второю имѣетъ

меньшее отношеніе, нежели шретья къ избытку шретьей предъ четвертою.

Пусть будетъ $A:B > C:D$. Говорю, что обращеніемъ, $A:A - B < C:C - D$.

Поселику $A:B > C:D$; то, обратеніемъ, $(A - B):B > (C - D):D$ *: посему, предложе- *35
ніемъ, $B:(A - B) < D:(C - D)$ *: слѣдствен- *30.
но, совокупленіемъ, $(B + A - B):(A - B) >$
 $(D + C - D):(C - D)$ *, то есть, *34.
 $A:(A - B) > C:(C - D)$.

XXXVII.

Ежели цѣлая величина къ цѣлой имѣетъ большее отношеніе, нежели оцѣная оцѣ первой къ оцѣнной оцѣ второй; то и остаточная къ остаточной будетъ имѣть большее отношеніе, нежели цѣлая къ цѣлой.

Пусть будетъ $(A + B):(C + D) > A:C$. Говорю, что $B:D > (A + B):(C + D)$.

Поселику $(A + B):(C + D) > A:C$; то обратеніемъ, $(A + B):A > (C + D):C$ *, посему *33.
обращеніемъ, $(A + B):(A + B - A) < (C + D):$
 $(C + D - D)$ *, то есть $(A + B):B < (C + D):C$; *36.
слѣдственно обратеніемъ, $(A + B):(C + D)$
 $< B:D$, или, что все то же, $B:D > A + B:C + D$.

XXXVIII.

Ежели первая величина ко второй имѣеть большее отношеніе, нежели третья къ четвертой, а третья къ четвертой имѣеть большее, нежели пятая къ шестой: то и первая ко второй имѣеть большее отношеніе, нежели пятая къ шестой.

Пусть будетъ $A:B > C:D$, и $C:D > E:F$.
Говорю, что $A:B > E:F$.

Вообрази величину G , чѣмъ $G:D :: E:F$.

13. Итакъ $C:D > G:D^$, поему $C > G$. Пусть будетъ $C = G + N$. Поелику же $A:B > C:D$; то должны быть тѣмъ равнокрашныя величинъ A, C и равнокрашныя величинъ B, D такія, что крашная первой больше крашныя второй, а крашная третьей не боль-

опр. 4. ше крашныя четвертой. Пусть такыя будутъ aA, bB, aC, bD , въ коихъ $aA > bB$, а $aC \triangleright bD$: то, поелику $C = G + N$, будетъ $a(G + N) \triangleright bD$, или $aG + aN \triangleright bD$, а поему $aG \triangleright bD$. Итакъ, величинъ

A, B, G, D

крашныя aA, bB, aG, bD

имѣютъ свойство означенное въ неравной

пропорцій, и потому $A : B > G : D$. Но полагаемо было, что $G : D :: E : F$: следовательно $A : B > E : F^*$.

* 13.

XXXIX.

Ежели будешь сколько нибудь величинъ и другихъ имъ равномногихъ, взятыхъ по двѣ по порядку, въ большемъ отношеніи; то и равноѣстно будутъ въ большемъ отношеніи.

Пусть будутъ величины A, B, C и другія имъ равномногія D, E, F , кои, взятые по двѣ по порядку, суть въ большемъ отношеніи, то есть $A : B > D : E$, и $B : C > E : F$. Говорю, что равноѣстно, $A : C > D : F$.

Вообрази величину G , чтобы $G : C :: E : F^*$. — акс. 3.
Итакъ $B : C > G : C$, поему $B > G^*$: и по- * 10.
сему $A : G > A : B$. Полагается же, что $A : B > D : E$; поему $A : G > D : E^*$. Вообрази * 38.
еще величину H , чтобы $H : G :: D : E$. Итакъ
 $A : G > H : G^*$, поему $A > H$: а поему * 13.
 $A : C > H : C^*$. И поелику величины H, G, C^*
и другія имъ равномногія D, E, F суть
таковы, что $H : G :: D : E$, и $G : C :: E : F$;
то будешь, равноѣстно, $H : C :: D : F^*$. * 22.

Доказано же, что $A : C > H : C$: слѣдова-
13. тельно $A : C > D : F^$.

XL.

Ежели будутъ три величины и другія имъ равномногія, взятые по двѣ въ обратномъ порядкѣ, въ большемъ отношеніи; то и равноѣстно будутъ въ большемъ отношеніи.

Пусть будутъ три величины A, B, C и другія имъ равномногія D, E, F , кои, взятые по двѣ въ обратномъ порядкѣ, суть въ большемъ отношеніи, то есть $A : B > E : F$, и $B : C > D : E$. Говорю, что равноѣстно, $A : C > D : F$.

* акс. 3. Вообрази величину G , чтобы $G : C :: D : E^*$.

* 13. Итакъ $B : C > G : C^*$, посему $B > G$: а по-

* 8. сему $A : G > A : B^*$. Полагается же, что

* 38. $A : B > E : F$, посему и $A : G > E : F^*$. Вообрази еще величину H , чтобы $H : G :: E : F$.

* 10. Итакъ $A : C > H : G$, посему $A > H^*$: а посему $A : C > H : C$. И поелику величины H, G, C и другія имъ равномногія D, E, F суть таковы, что $H : G :: E : F$, и $G : C :: D : E$;

* 23. то будетъ, равноѣстно, $H : C :: D : F^*$.

Доказано же, что $A:C > H:C$; слѣдовательно $A:C > D:F^*$.

*13.

XII.

Ежели будетъ сколько ниссть величинъ и другихъ имъ равномногихъ, взявшихъ по двѣ по порядку, въ большемъ отношеніи: то всѣ величины перваго ряда ко всѣмъ величинамъ втораго ряда будутъ имѣть меньшее отношеніе, нежели первая къ первой, а большее, нежели послѣдняя къ послѣдней: также большее нежели всѣ перваго ряда кромѣ первой, ко всѣмъ втораго ряда кромѣ первой же.

Пусть будутъ величины A, B, C и другія имъ равномногія D, E, F , кои, взявшія по двѣ по порядку, суть въ большемъ отношеніи, то есть $A:B > D:E$, и $B:C > E:F$. Говорю, во первыхъ, что $(A + B + C):(D + E + F) > (B + C):(E + F)$.

Поелику $B:C > E:F$, то совокупленіемъ, $(B + C):C > (E + F):F^*$: посему премѣненіемъ, $(B + C):(E + F) > C:F^*$. Итакъ, поелику *33. цѣлая $(B + C)$ къ цѣлой $(E + F)$ имѣетъ большее отношеніе, нежели оспиятая C къ осп-

иятой F , шо и осальная къ осальной
будешъ имѣшь большее отношеніе, нежели

37. цѣлая къ цѣлой; посему $B:E > (B+C):(E+F)$.

Но изъ $A:B > D:E$, премѣненіемъ, $A:D > B:E$,

*38. посему $A:D > (B+C):(E+F)$ *: посему,
премѣненіемъ и совокупленіемъ, $(A+B+C):$

*33 и 34. $(B+C) > (D+E+F):(E+F)$ *; и слѣдо-
вательно премѣненіемъ, $(A+B+C):$
 $(D+E+F) > (B+C):(E+F)$.

Говорю шакожъ, что $(A+B+C):(D+E+F)$

$< A:D$. Поелику, по доказанію, $(A+B+C):$

$(D+E+F) > (B+C):(E+F)$, шо есть

цѣлая къ цѣлой имѣетъ большее отноше-

ніе, нежели ошняя къ ошней: шо и

осальная къ осальной будешъ имѣшь

большее отношеніе, нежели цѣлая къ цѣ-

37. лой, шо есть $A:D > (A+B+C):$

$(D+E+F)$ или, что все равно,

$(A+B+C):(D+E+F) < A:D$.

Говорю еще, что $(A+B+C):(D+E+F)$

$> C:F$. Поелику $B:C > E:F$: шо, какъ и

прежде, совокупленіемъ и премѣненіемъ,

*34 и 33. $(B+C):(E+F) > C:F$ *. Доказано же, что

$(A+B+C):(D+E+F) > (B+C):(E+F):$

*38. слѣдовательно $(A+B+C):(D+E+F) > C:F$ *.

XLII.

Ежели первая величина ко второй имѣеть большее отношеніе, нежели третья къ четвертой; и также пятая ко второй имѣеть большее отношеніе, нежели шестая къ четвертой: то и первая съ пятою ко второй будетъ имѣть большее отношеніе, нежели третья съ шестюю къ четвертой.

Пусть будутъ шесть величинъ А, В, С, D, Е, F, такія, что

$$A : B > C : D,$$

$$E : B > F : D.$$

Говорю, что $(A + E) : B > (C + F) : D$.

Вообрази величину G, чтобы $G : B :: C : D$ *. * акс. 3.

Итакъ $A : B > G : B$ *; посему $A > G$. Во-^{*13.}

образи еще величину H, чтобы $H : B :: F : D$;

то опять будетъ $E > H$: слѣдовательно

$(A + E) > (G + H)$. Итакъ, поелику въ шес-

сти величинахъ G, B, C, D, H, F

$$G : B :: C : D,$$

$$H : B :: F : D;$$

то $(G + H) : B :: (C + F) : D$ *. Но ^{*24.}

$(A + E) : B > (G + H) : B$, ибо, по доказанному,

$(A + E) > (G + H)$: слѣдовательно

$(A + E) : B > (C + F) : D$ *.

*13.

Слѣдствіе. Если будетъ $A : B :: C : D$,
 $E : B > F : D$; то такъ же докажется, что
 $(A + E) : B > (C + F) : D$.

XLIII.

Если къ неравнымъ величинамъ прило-
 жаться равныя или одна и таже; то боль-
 шая къ меньшей будетъ имѣть большее
 отношеніе, нежели сложенная къ сложенной.

Пусть будутъ величины A, B, C , изъ ко-
 ихъ $A > B$. Говорю, что $A : B > (A + C) : (B + C)$.

8. Поскольку $A > B$, то $C : B > C : A$.

Но $B : B :: A : A$;

* сл. 42. посему $C + B : B > C + A : A$ *,

или $(C + A) : A < (C + B) : B$. А посему,

*30. преложеніемъ, $A : (A + C) > B : (B + C)$ *; слѣдова-

*33. тельно, прѣмѣненіемъ, $A : B > (A + C) : (B + C)$ *.

XLIV.

Отношеніе, сложенное изъ большихъ от-
 ношеній, есть больше сложенного изъ мень-
 шихъ.

Пусть будетъ $A : B > C : D$,

$E : F > G : H$,

$K : L > M : N$.

Говорю, что отношеніе, сложенное изъ от-

ношеній $A:B$, $E:F$ и $K:L$ есть больше
отношенія сложеннаго изъ отношеній $C:D$,
 $G:H$ и $M:N$, то есть

$$(A:B) + (E:F) + (K:L) > (C:D) + (G:H) + (M:N).$$

Возьми какія нисешь величины O и S ,
и пустьъ будешь*

* акс. 3.

$$A : B :: O : P, \quad C : D :: S : T,$$

$$E : F :: P : Q, \quad G : H :: T : V,$$

$$K : L :: Q : R; \quad M : N :: V : X.$$

Посему* $O : P > S : T,$

* 13.

$$P : Q > T : V,$$

$$Q : R > V : X.$$

Итакъ, чепыре суть величины O, P, Q, R
и другія имъ равномогя S, T, V, X ,
взяшыя по двѣ въ большемъ отношеніи:
посему равномѣрно, $O : R > S : X$ *. Но, по *39.
опредѣленію сложеннаго отношенія,

$$O : R :: (A:B) + (E:F) + (K:L),$$

$$S : X :: (C:D) + (G:H) + (M:N);$$

слѣдовательно

$$(A:B) + (E:F) + (K:L) > (C:D) + (G:H) + (M:N)*. * 11.$$

Слѣдствіе. Отсюда явствуетъ, что от-
ношенія удвоенныя, или упрощенныя боль-
шихъ отношеній, суть больше, нежели удво-
енныя или упрощенныя меньшихъ.

XLV.

Ежели будутъ четыре величины непрерывно равноразисвующія, изъ коихъ первая наибольшая; то первая къ третьей имѣетъ большее отношеніе, нежели удвоенное первая ко второй, а первая къ четвертой большее, нежели утроенное первая же ко второй.

Пусть будутъ четыре величины A, B, C, D , непрерывно равноразисвующія, изъ коихъ A наибольшая, то есть такія, что $A - B = B - C = C - D$. Говорю, во первыхъ, что $A : C > \frac{2}{A : B}$.

* акс. 3. Вообрази величину E , чтобы $A : B :: B : E$.*

И поелику $A > B$; то $B > E$: посему

* 25. $(A + E) > 2B$ *; а посему $(A + E) - (B + E) > 2B - (B + E)$, то есть $(A - B) > (B - E)$.

Но $(A - B) = (B - C)$: посему $(B - C) > (B - E)$;

* 8. слѣдственно $E > C$. Чего ради $A : C > A : E$.*

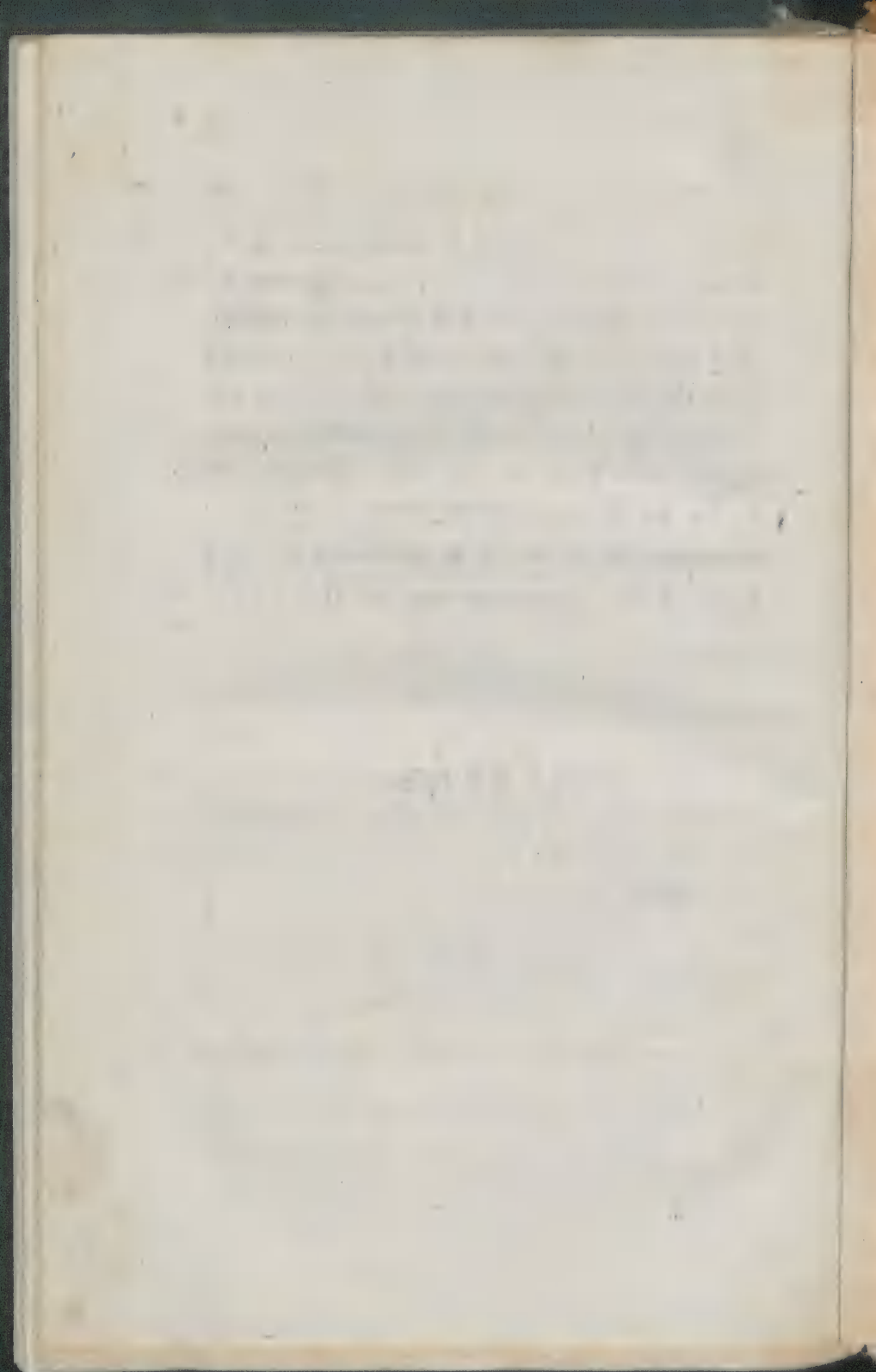
Поелику же A, B, E суть непрерывно пропорціональныя, то $A : E :: \frac{2}{A : B}$; доказаю же,

что $A : C > A : E$: слѣдовательно $A : C > \frac{2}{A : B}$.

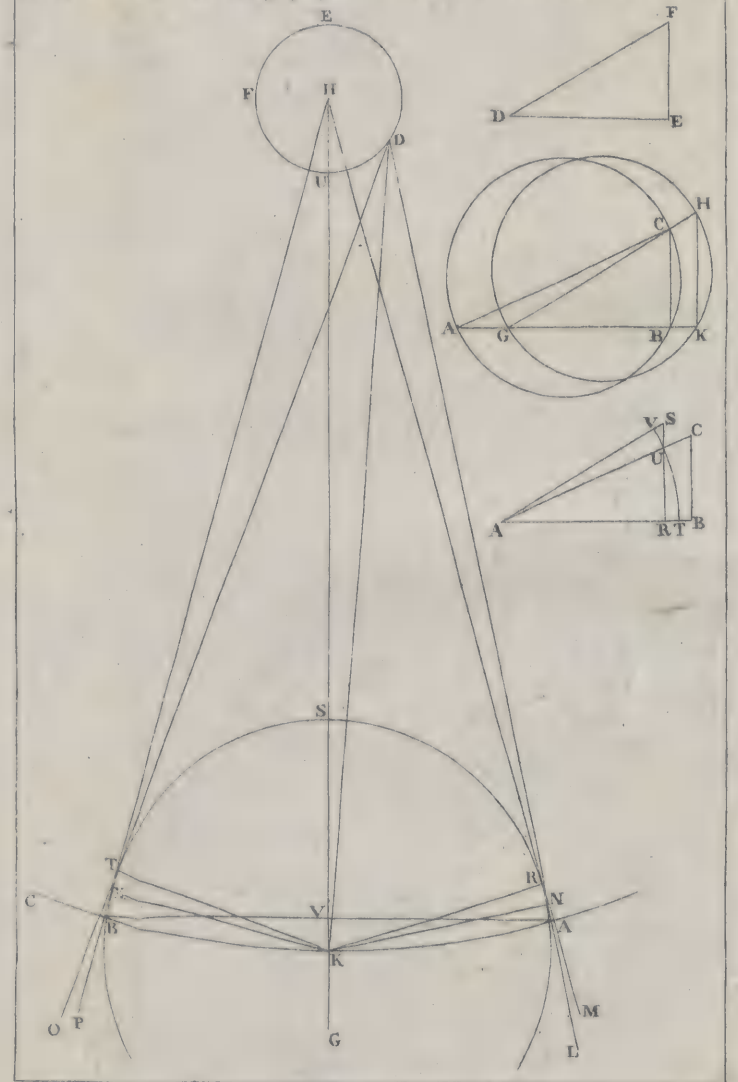
Говорю еще, что $A : D > \frac{3}{A : B}$.

Вообрази еще величину F , чтобы $B:E::E:F$.
 Посему оная $B + F > 2E^*$. По доказанному *25 .
 же $E > C$: посему $B + F > 2C$; а посему
 $(B + F) - (C + F) > 2C - (C + F)$, то есть
 $(B - C) > (C - F)$. Но $(B - C) = (C - D)$:
 посему $(C - D) > (C - F)$, слѣдственно
 $F > D$: чего ради $A:D > A:F^*$. Поелику же *3 .
 A, B, E, F суть непрерывно пропорціо-
 нальныя; то $A:F::\overset{3}{A}:B$. Доказано же, что
 $A:D > A:F$: слѣдовательно $A:D > \overset{3}{A}:B^*$. *13 .

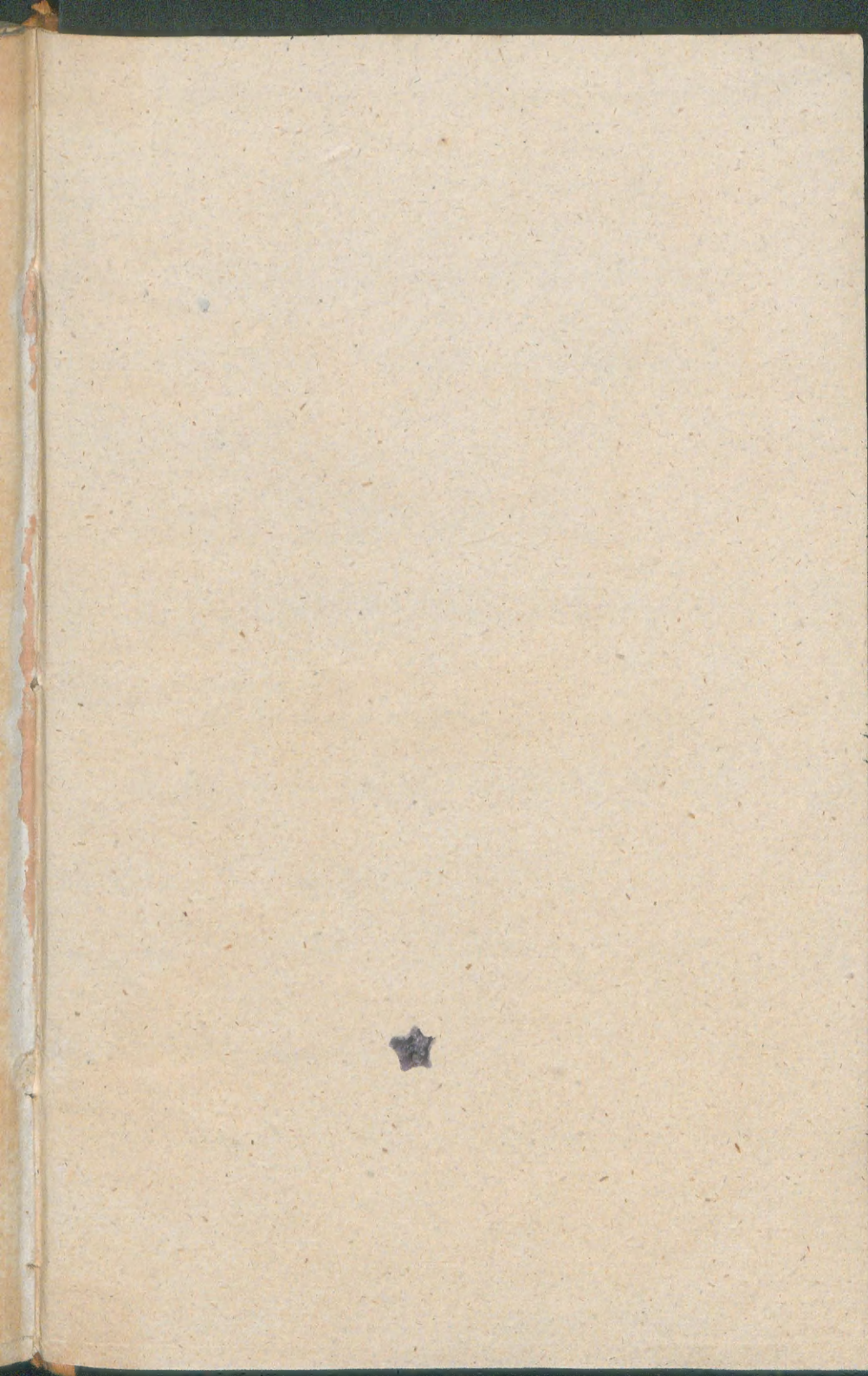
К О Н Е Ц Ъ.

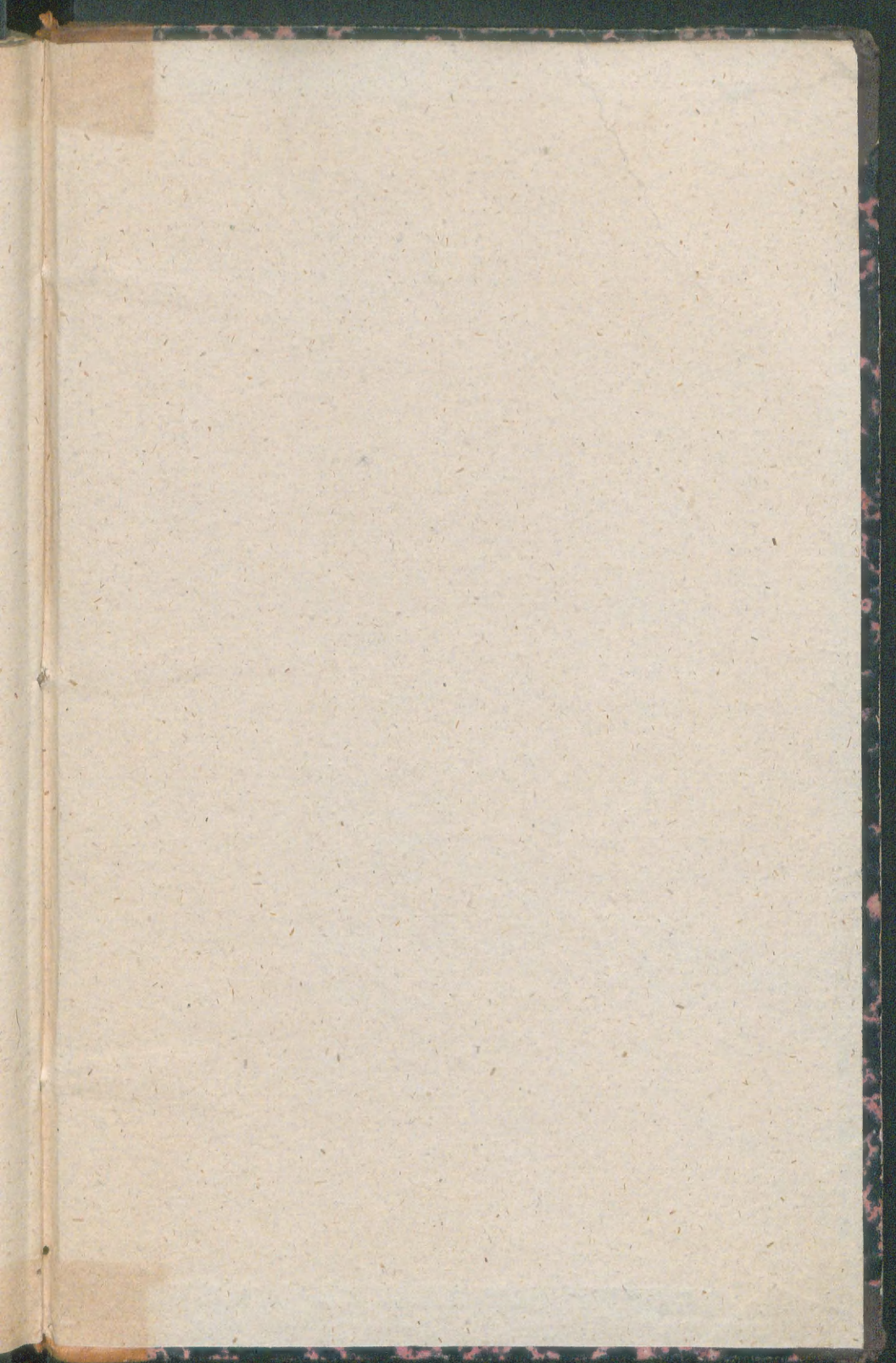


Архимеда Псаммитъ.











2010514801